DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Mathematik, Philosophie und Theologie als dieselben Wissenschaften der einen unendlichen Nichtfassbarkeit

Verfasserin

Elisabeth Lehner

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Theologie

Wien, im April 2011

Studienkennzahl:	A 190 020 406
Studienrichtung:	Katholische Religion
Betreuer:	Ao. Univ.-Prof. MMMag. DDr. Kurt Appel

INHALTSVERZEICHNIS

INHALTSVERZEICHNIS 2

VORWORT 7

1 Einleitung 9

1.1 Ausgangspunkt, Aufgabe und Ziel der Diplomarbeit 9

1.2 Eine kurze Einführung 10

1. TEIL

I DAS UNENDLICHE IN DER ARITHMETIK 14

1 Die Zahl 15

1.1 Der Terminus „Zahl“ 15

1.2 Definition der „Zahl“ 19

1.2.1 Induktive Zahlen 21

1.2.2 Induktive Kardinalzahlen 22

2 Die Folge der natürlichen Zahlen 24

2.1 Die Axiomatik des Peano 25

2.1.1 Das Prinzip der vollständigen Induktion 27

2.1.2 Russell und Kaufmann: Konsens – Dissens 31

EXKURS: Primzahlen – die multiplikativen Bausteine der natürlichen Zahlen 34

3 Erweiterungen des Zahlenbegriffs 41

3.1 Positive und negative Zahlen 41

3.2 Rationale Zahlen 43

3.3 Reelle Zahlen 47

II DIE MENGENLEHRE CANTORS – FREIHEIT UND ABGRUND DER MATHEMATIK 56

1 Georg Cantor 56

2 Geisteshaltung Georg Cantors 57

2.1 Der Wahrheitsbegriff Cantors 57

2.2 Die Auffassung des Transfiniten bei Cantor 58

2.3 Cantors Ontologie und Religion 63

3 Die Kontinuumhypothese – Eine Herausforderung für die Mathematik 68

3.1 Eine notwendige, aber hilfreiche Einführung – Cantors Zahlen 68

3.1.1 Transfinite Zahlen 68

3.1.2 Endliche Kardinalzahlen 69

3.1.3 Endliche Ordinalzahlen 72

3.1.4 Transfinite Kardinal- und Ordinalzahlen 75

3.2 Potenzmengen – Der Aufstieg zu höheren Mächtigkeiten 77

3.3 Kontinuumhypothese 79

4 Resümee 85

4.1 Umstrittener Formalismus 85

4.2 Das Erbe Cantors 88

III KURT GÖDEL UND DIE UNVOLLSTÄNDIGKEIT FORMALER AXIOMENSYSTEME 90

1 Gödels Unvollständigkeitsbeweise 90

1.1 Gödels Beweise 90

1.2 Der erste Unvollständigkeitsbeweis 94

1.3 Gödelnummerierung – Die Zuordnung einer Gödelzahl 95

1.4 Kernstück des Beweises 96

2. TEIL

IV DAS UNENDLICHE, DAS SEIN UND DAS ER-EIGNIS IN DER PHILOSOPHIE DES ALAIN BADIOU 101

1 Meditation 13 – Das Unendliche: das andere, die Regel und das Andere 101

1.1 Badious Kritik an einer Ontotheologie und seine These: „Das Sein als solches ist unendlich.“ 102

1.1.1 Das Paar unendlich/endlich 109

1.1.2 „Das Sein ist.“ – „Das Sein ist nicht.“ 112

1.1.3 Es existiert eine Unendlichkeit der Präsentation 115

1.1.4 Das „andere“ und das „Andere“ 119

2 Meditation 16 – Ereignisstätten und geschichtliche Situationen. Oder: „Was nicht das Sein-als-Sein ist.“ 124

2.1 Geschichte versus Natur. Oder: „Was ist das Anormale?“ 128

EXKURS: Das Nichts und das Leere 133

1 Die Suche nach dem Nichts als Name der Leere 133

1.1 Die Leere als Eigenname des Seins 136

2.2 Die Ereignisstätte 138

2.2.1 Die Ereignisstätte am Rand der Leere 138

2.3 Die Natur ist absolut, die Geschichtlichkeit ist relativ 141

3 Meditation 17 – Das Mathem des Ereignisses. Oder: Die Unentscheidbarkeit der Zugehörigkeit des Ereignisses zu einer Situation 146

3.1 Alain Badiou auf der Spur des Ereignisses 148

Exkurs: Heidegger und der Begriff des Ereignisses 151

Exkurs: Gödel und die Entdeckung des Ereignisortes in der formalen Unvollständigkeit von Systemen 153

3.2 Das Verhältnis von Ereignis und Situation 156

3.2.1 Alain Badiou: Ein Ereignis ist immer lokalisierbar 156

3.3 Die „anschauliche“ Idee eines Ereignisses. Oder: Die Französische Revolution 159

3.4 Die Unentscheidbarkeit der Zugehörigkeit des Ereignisses zu einer Situation 161
3.4.1 Erste Hypothese: Das Ereignis gehört zur Situation 161
3.4.2 Zweite Hypothese: Das Ereignis gehört nicht zur Situation 163

3. TEIL

V DIE RELEVANZ DES MATHEMATISCHEN UNENDLICHKEITSVERSTÄNDNISSES FÜR DIE THEOLOGIE 166

1 Resümee über das Unendliche in der Mathematik insbesondere bei Cantor und Gödel 166
2 Resümee über das Ereignis und dem Ereignisort bei Badiou vor dem Hintergrund der Lektüre Badious: Paulus – Die Begründung des Universalismus 168

LITERATURVERZEICHNIS 170

ABSTRACT 173

LEBENSLAUF 174

VORWORT

Bereits während meiner Schulzeit übten schon in jungen Jahren große Zahlen eine immense Faszination auf mich aus. Ich begann große Zahlen zu addieren und zu multiplizieren mit dem Ergebnis, dass, ganz gleich welche Zahl ich als Ergebnis bekam, es immer noch größere gab. Schon damals machte ich mir Gedanken über das Unendliche. In der Oberstufe wurden meine Vorstellungen durch die Differential- und Integralrechnung ein wenig konkreter und ich entdeckte, dass es nicht nur das unendlich Große, sondern auch das unendlich Kleine gibt. Im Mathematikstudium begegnete mir dann das Unendliche auf Schritt und Tritt durch die Vorlesungen hindurch. Aber auch in der Religion tauchte dieses Thema immer wieder auf: die Endlichkeit oder Unendlichkeit der Natur, die Endlichkeit der Ontologie, die Grenzen der Philosophie, der allumfassende, unbegrenzte und nicht vollkommen erfassbare Gott.

All diese Eindrücke bewirkten, dass mein Interesse an der Unendlichkeit immer weiter gegen den Himmel stieg, bis ich mich – schon während des ersten Studienabschnittes – dazu entschloss, diesem Thema näher auf die Spur zu kommen. Meine Ausgangsfrage war zunächst völlig trivial:

Gibt es das Unendliche? Und wenn ja, was ist es? Dieser und anderen Fragestellungen schenke ich im Rahmen dieser Arbeit mein ganzes Interesse.

Platon und Aristoteles zufolge vermag sich der Mensch durch seine Vernunft zu Gott zu erheben, mehr noch, durch sie haben wir Anteil am Göttlichen. Die Gesetze der Vernunft gelten demnach für Gott und Mensch. Die Vernunft ist es, durch die wir in der Lage sind, alles Sinnvolle, Zweckvolle und Vollkommene bestimmen und begrenzen zu können. Hier zeigt sich bereits ein erstes Problem im Umgang mit dem Unendlichen, das sich seinem Begriff nach nicht von der Vernunft einfangen lässt. Die Konsequenzen dieser Absage an die Gesetze der Vernunft durch das Unendliche zeigen sich in dem radikalen Bruch von Endlichem und Unendlichem, der sich selbst durch eine stufenweise Annäherung nicht aufheben lässt. In der Auseinandersetzung mit den sich daraus ergebenden Widersprüchen erfährt man die Möglichkeiten und Grenzen des menschlichen Geistes.
Der Mensch „erkennt“ seine Umwelt indem er sie „begreift“ und „erfasst“. Dieses Begreifen der Dinge meint ein Erfassen von ihren Grenzen. In gleichem Maße kann unser Geist nur jenes erkennen, das er als ein Begrenztes setzen muss, obgleich unse-

re Gedankengänge in ihrem Streben – durch die Möglichkeit der unbegrenzten Fortsetzung – an sich grenzenlos sind. Jede Grenze, die wir dabei unserem erkennenden Geist setzen, können wir durch die Frage nach dem Jenseits dieser Grenze beliebig verschieben. Dem Vermögen unseres Geistes verdanken wir demnach die Fähigkeit, Reihen von Zahlen, Zeiten und Kausalitäten aufzustellen, die ins Unendliche reichen.

Die Zurückweisung des Unendlichkeitsbegriffs – insbesondere die des aktual Unendlichen – brächte die Gefahr der Beschränkung des eigenen Geistes mit sich. Es geht auch gar nicht darum, ob wir das Unendliche in der objektiven Natur erkennen können, denn weder das potentielle noch das aktuale Unendliche „existiert“ in der für uns erkennbaren Natur. Der Mensch als ein endliches Wesen ist Teil dieser Natur und kann daher nur dieses eine „Endliche“ und seine Bestandteile erkennen. Bestenfalls kann er im Rahmen seiner geistigen Möglichkeiten das potentiell Unendliche als eine fortwährende Wiederholung eines Prozesses denken. Vielmehr sollte jedoch das Ziel unseres Strebens darin liegen, die für das Unendliche wesentlichen Begriffe zu erfassen.

1 Einleitung

1.1 Ausgangspunkt, Aufgabe und Ziel der Diplomarbeit

Meine Arbeit sehe ich als einen Versuch, ausgewählte Aspekte und Komponenten des „Unendlichkeitsproblems“ zu beleuchten. Dabei soll eine Brücke geschlagen werden zwischen der Mathematik, der Philosophie und der Theologie und zwar in der Art und Weise, dass jeweils eine dieser Wissenschaften an jener Stelle unterstützend eingreift und die Arbeit weiterführt, wo die eigenen fachspezifischen Methoden eines anderen Wissensgebietes nicht mehr greifen und mit ihnen das Problem weder logisch integriert noch gelöst werden kann.
So gab es in der Geschichte der Mathematik die verschiedensten Ideen und Ansätze wie eine Theorie „des Unendlichen“ logisch sinnvoll in die bestehenden Konzepte eingebettet werden kann. Einer der hierbei wohl bedeutendsten Mathematiker war Georg Cantor, dessen Mengenlehre nicht nur die bis dahin als für sich einzeln gedachten mathematischen Zweige verband, sondern auch ausdrücklich als eine „Lehre vom Unendlichen“ gelesen werden kann. Durch die bahnbrechende Arbeit des Wiener Mathematikers Kurt Gödel zu Beginn des 20. Jahrhunderts wurde die Mathematik schließlich mit einer „neuartigen“ Fragestellung – dem Problem der „Unentscheidbarkeit“ – konfrontiert, die sich mit den der traditionellen Mathematik zur Verfügung stehenden Mitteln nicht mehr allgemein zufriedenstellend handhaben ließ.

An diesem Punkt setzt der zeitgenössische Philosoph Alain Badiou an und führt durch den sowohl mathematisch wie philosophisch grundgelegten Gebrauch des Begriffes des „Ereignisses“ die Mathematik aus der scheinbaren Sackgasse heraus, indem er die ursprüngliche mathematische Fragestellung in der Art und Weise umwandelt, dass sie sowohl philosophischer als auch politischer Natur wird. Und es ist eben dieser Autor, der das Denken und die Theologie des Apostels Paulus als Exempel heranzieht um zu zeigen, dass das zunächst mathematische Problem in konkrete Lebenszusammenhänge übersetzt und gedeutet werden kann. Die Frage nach dem Unendlichen, dem Unentscheidbaren und dem Ereignis tritt so als eine eminent politische und gesellschaftliche Frage ans Licht. Das (scheinbare) Randphänomen des Problems des Unendlichen, mit dessen Begrifflichkeit ich mich zunächst auseinandersetze, wird auf diesem Wege zu einer entscheidenden Fragestellung einer gesellschaftlich relevanten Theologie.

1.2 Eine kurze Einführung

Im ersten Teil dieser Arbeit begegnet dem Leser zunächst das Thema der Unendlichkeit in der Arithmetik, bei Georg Cantor und bei Kurt Gödel. Nach einer allgemeinen Beschäftigung mit dem Terminus Zahl und deren Definition gelangt man über die induktiven Zahlen und Kardinalzahlen zu der Folge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3 usw. Aber was bedeutet dieses „usw." und wo führt es hin? Es bringt uns zunächst einmal der Einsicht nahe, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, d.h. die Menge der natürlichen Zahlen ist abzählbar unendlich. Über die Axiomatik des Peanos und das Prinzip der vollständigen Induktion wird der Weg zur Erweiterung des Zahlenbegriffes freigelegt. Es folgen die (positiven und) negativen ganzen Zahlen, die rationalen und irrationalen sowie die reellen Zahlen.

Im zweiten Kapitel begegnet man dem deutschen Mathematiker Georg Cantor und seiner „Schöpfung" der Mengenlehre als eine mathematische Disziplin. Neben der Beschäftigung mit seiner Geisteshaltung in Bezug auf Wahrheit, Transfinites, Ontologie und Religion ist die Kontinuumhypothese zentraler Inhalt dieses Kapitels. Ein Grund für die Auseinandersetzung mit Georg Cantor ist das „abgründige Gebiet der Selbstbezüglichkeit", dem er sich vollends bewusst war. Dabei sind die Paradoxien der Mengenlehre Teile eines noch umfassenderen Problems der Widerspruchsfreiheit der Mathematik.
Mit der Herausforderung der Widerspruchsfreiheit tritt im dritten Kapitel der Mathematiker Kurt Gödel in den mathematischen Ring ein. Er konstruiert zunächst ein formales System und veranschaulicht mit seinem Unvolllständigkeitsbeweis, dass es existierende wahre arithmetische Sätze gibt, die nicht beweisbar sind. Selbst durch Hinzufügung eines „neuen wahren" Axioms bleibt die Arithmetik, obgleich widerspruchsfrei, unvollständig.

Im zweiten Teil dieser Arbeit wird versucht, die Mathematik, mit dem Eingreifen der Philosophie des Alain Badiou, in eine neue Richtung zu lenken. Badious Ausgangsthese ist dabei folgende:

> Die Wissenschaft vom Sein-als-Sein (…) *existiert* seit den Griechen, denn hier wird der Status und die Bedeutung der Mathematik begründet.

> Doch wir besitzen erst heute die Mittel, um dies zu wissen. Aus dieser These folgt, dass die Philosophie die Ontologie – welche als exakte und eigenständige Disziplin existiert – nicht zum Zentrum hat, sondern dass sie zwischen der Ontologie, den modernen Subjekttheorien und ihrer eigenen Geschichte *zirkuliert*.[1]

Nach Badiou ist die Schöpfung Cantors – die Mengenlehre – der Punkt, an dem die Mathematik gegenüber sich selbst blind wird. „Erst hier kommt schließlich zum Ausdruck, dass die mathematischen „Objekte“ und „Strukturen“ (…) alle als reine Mannigfaltigkeiten zu bezeichnen sind.“[2]

Durch seine Beschäftigung mit der Mathematik erkannte er, dass man mit dem Cantorschen Kontinuumproblem auf einen unauslöschlichen Widerstand stößt. Die Mathematik wird ihm zufolge dazu genötigt, den ontologischen Diskurs zu stützen, insofern Badiou die Mathematik als Ontologie – die Wissenschaft vom Sein-als-Sein – mit der Formel Mathematik = Ontologie identifiziert. Mit dieser Aussage muss man nicht nur nicht mehr nach dem Fundament der Mathematik forschen, sondern sie beseitigt auch das Problem der „Natur der mathematischen Objekte“, denn:

> Die Mathematik *präsentiert* im strengen Sinne *nichts*, ohne dass sie dadurch ein leeres Spiel wäre, denn nichts außer der Präsentation selbst, das heißt die Vielheit, präsentieren zu können und somit niemals mit der Form des Objekts übereinzukommen, ist gewiss eine Bedingung jedes Diskurses über das Sein als Sein.[3]

Eine Verbindung zwischen der Mathematik und der Frage nach dem Sein wird von vielen Philosophen ins Abseits gedrängt, weshalb sich das Verhältnis zwischen den beiden verdunkelte, indem es zwischen Würde auf der einen Seite und Verachtung auf der anderen Seite hin und her schwankte. Badiou möchte nicht die These aufstellen, dass das Sein mathematisch ist, denn seine These bezieht sich nicht auf die

[1] BADIOU, Alain: Das Sein und das Ereignis. – Zürich [u.a.] : Diaphanes, Berlin 2005. Kamecke, Gernot [Übers.] : / aus dem Franz. übers. Von Gernot Kamecke. – 1. Aufl. 2005. S 17.
[2] BADIOU: SE, S 20.
[3] BADIOU: SE, S 20f.

Welt, sondern auf den Diskurs. In diesem Diskurs, so behauptet er, spricht die Mathematik über das Sein-als-Sein aus, was gesagt werden kann und nicht die Philosophie.

Badiou ist sich dabei vollends bewusst, dass die These von der Identität von Mathematik und Ontologie weder von den Vertretern der Philosophie noch von denen der Mathematik gutgeheißen wird. Tatsächlich ist es so, dass die Mathematik heute nicht mehr auf die Philosophie angewiesen ist und Badiou aus diesem Grund die These aufstellt, dass der Diskurs über das Sein unabhängig fortbesteht, wobei dieser „heute" durch die Schöpfung Cantors, die Mengenlehre, festgelegt ist. In gewisser Hinsicht stimmt ihm zufolge die These der Mathematik, dass sich aus der Behauptung, die Mathematik sei Ontologie, ergibt, dass sich die Philosophen bzw. Ontologen mit der Mathematik von heute beschäftigen müssen. Basierend auf der Identität von Mathematik und Ontologie ist es nach Badiou notwendig, eine essenzielle Schlussfolgerung zu ziehen, dass die Philosophie ursprünglich von der Ontologie getrennt ist. Das bedeutet aber nicht, dass die Ontologie nicht existiert, sondern vielmehr, dass sie „absolut existiert". Daher stammt die Rede vom Sein-als-Sein definitiv nicht vom philosophischen Diskurs ab.

Im dritten Teil ist die Auferstehung Christi der zentrale Ausgangspunkt. Hier stellt sich die Frage, inwiefern das Ereignisdenken von Badiou mit der paulinischen Botschaft von der Auferstehung zusammenpasst bzw. ob dieses Denken Parallelen in der Theologie hat.

Der Apostel Paulus ist für Alain Badiou mehr denn je aktuell, denn er sieht ihn als einen Prototyp eines Denkens des Ereignisses, weshalb er für ihn zu einem eminenten Zeugen der heutigen Philosophie wird. Badious Unternehmen ist dabei rein subjektiv. Die Person des Paulus fasziniert ihn deshalb, da man bei ihm eine Verbindung zwischen einer Idee eines Bruchs, einer Praxis und eines Denkens ausmachen kann, die durch und durch menschlich ist. In Badious Buch *Paulus* kommen dabei nicht nur anthropologische Züge zum Vorschein, sondern – in dessem Sinne – auch antiphilosophische Regungen.

Das Ereignis für Paulus ist die Auferstehung Christi durch die er zu seinem radikalen Konzept von subjektiver Gemeinschaft und Subjektivität kommt. Das christliche Subjekt zeichnet sich nach Badiou gerade darin aus, dass es eigenschaftslos ist, dass es bei der Bekehrung zu einer Entleerung gekommen ist und es damit vor einem neuen Anfang steht ohne von Voraussetzungen determiniert zu sein. In dieser fehlenden Identität liegt der Grundstein für die Subjektivität, denn Subjekt sein meint, dass man, obwohl man durch ein Ereignis erschüttert wurde, Gott dennoch die Treue hält.

Von daher entwickelt sich eine neue christliche Gemeinschaft, die weder auf gemeinsame Gesetze, Werte oder einer gemeinsamen Herkunft beruht. Sie beruft sich einzig und allein auf das Christusereignis, die Auferstehung Christi.

1. TEIL

I DAS UNENDLICHE IN DER ARITHMETIK

Zählen, vergleichen, ordnen und klassifizieren sind die elementarsten Tätigkeiten in der Mathematik. Bereits hier begegnet man unweigerlich dem Unendlichen, dem zu eigen ist, dass man sich von ihm lediglich bis zu einem gewissen Grad eine Vorstellung konstruieren kann. Mit dem Unendlichen verhält es sich wie mit dem Zählen. Grundsätzlich könnten wir immer „noch einen Schritt“ weiter gehen, denn keiner der einzelnen Schritte macht irgendwelche Schwierigkeiten. Wir wissen, dass wir – zumindest theoretisch – ewig weiterzählen könnten, ohne je an ein Ende zu kommen. Die unendliche Folge der Zahlen, die man dabei erhält, entzieht sich der eigenen anschaulichen Vorstellung. Unser Denken hat die Fähigkeit – die Macht (lat. potens) – sich im Abstrakten diesen Prozess Schritt für Schritt vorzustellen. In diesem Zusammenhang sprechen wir von einem potentiell Unendlichen[4] als ein für uns Menschen nie einholbares und fassbares Ideal.

Beim Herantasten an mathematische Fragestellungen bedürfen wir zweier Instrumente für die Erweiterung unserer logischen Fähigkeiten. Eines führt uns Schritt für Schritt vorwärts zur höheren Mathematik und entspricht damit der üblichen Richtung eines konstruktiven Studiums der Mathematik. Das zweite Instrument, die mathematische Philosophie, führt uns rückwärts zum logischen, in der Mathematik bereits als gesichert angesehenen Fundament der Dinge, indem es analytisch zu immer größerer Abstraktion und logischer Einfachheit fortschreitet. Sie ist es, die nach den grundlegenden Begriffen und Prinzipien fragt, um die Wurzeln unserer Fragestellungen definieren bzw. ableiten zu können. Die Unterscheidung der beiden Richtungen liegt hierbei nicht im Wesen ihrer Sache. Sie hängt vom Standpunkt des Forschers und seines angepeilten Ziels ab und nicht von den Sätzen, die ihren Gegenstand bilden. Die mathematische Philosophie wählt ihrerseits den Weg von der Anschauung zur Sprache und Logik.

[4] Begrifflich exakt gefasst wird diese Vorstellung in der modernen, axiomatischen Definition der natürlichen Zahlen: Jede natürliche Zahl hat per definitionem einen Nachfolger. Folgerichtig gibt es keine letzte natürliche Zahl, denn diese hätte unweigerlich wiederum einen Nachfolger. Zu einem späteren Zeitpunkt werden wir uns mit einer anderen Form des Unendlichen beschäftigen, sprich dem aktual Unendlichen als ein wirklich existierendes Unendliches.

1 DIE ZAHL

In der *Einführung in die mathematische Philosophie* betont Bertrand Russell, dass er zunächst einer ontologischen – gegenüber einer operativen oder axiomatischen – Fundierung des Zahlenbegriffs den Vorzug gewährt. Er strebt einen durch Abstraktion gebildeten Zahlenbegriff an und reduziert vor diesem Hintergrund die undefinierten Terme der Axiomatik des Peano[5] auf eine mengentheoretische Interpretation. Die Auswirkung von Russells Auffassung zeigt sich schließlich in der Notwendigkeit der Voraussetzung eines Unendlichkeitsaxioms, dem zufolge es unendlich viele Dinge in der Welt gibt bzw. geben soll.

1.1 Der Terminus „Zahl“

Zunächst geht es um die Frage, was eine Zahl ist, denn obgleich der Terminus „Zahl“ vom Intuitiven her für uns nicht völlig leer ist, so kennen wir seine konkrete Bedeutung und seinen Inhalt noch nicht. Gleichzeitig ist nach Russell die Differenzierung der Begriffe „Zahl“ und „Anzahl“ aus folgendem Grund wesentlich:

> Zahl ist das Eigentümliche an den Zahlen, wie Mensch das Eigentümliche an den Menschen ist. Eine Anzahl von Dingen ist nicht ein Beispiel für eine Zahl, sondern für irgendeine besondere Zahl.[6]

Als Erklärung hierfür dient ihm folgender Vergleich: Eine bestimmte Zahl, wie z.B. die Zahl 3, ist ein Beispiel für eine Zahl, nicht aber so ein Trio von Menschen, da es sich dabei um „eine Anzahl von Dingen“ und nicht um ein Beispiel für eine Zahl handelt. Dieses Trio ist lediglich ein Exempel für eine bestimmte Zahl. Diese aber ist nicht deckungsgleich mit einer Kollektion oder anders gesagt einer Menge, deren Anzahl von Elementen gleich dem Betrag jener bestimmten Zahl ist. Nach Russell ist die Zahl 3 nicht identisch mit dem Trio, sondern sie ist dasjenige Charakteristikum, das alle Trios gemeinsam haben und sie von anderen Mengen unterscheidet. Russell stellt damit die Behauptung auf, dass Zahlen Eigenschaften von Mengen sind.

---

[5] Die Peano-Axiomatik wird an späterer Stelle näher behandelt.
[6] RUSSELL, Bertrand: Einführung in die mathematische Philosophie. / Bertrand Russell. – Darmstadt [u.a.] : Holle-Verl. [1975?], S 16.

Um seiner These folgen zu können, ist es in diesem Zusammenhang erforderlich, eine kurze Einführung zu dem Mengenbegriff zu geben. Die Definition einer Menge kann nach Russell von zwei völlig verschiedenen Blickwinkeln her erfolgen.

Die erste Methode führt durch das Aufzählen der Glieder zur „Umfangsdefinition“. Im Gegensatz dazu führt der zweite Weg durch das Anführen von definierenden Eigenschaften zur „Inhaltsdefinition“, die, wie die Praxis uns zeigt, logisch bedeutsamer ist, da wir – vor allem in Zusammenhang mit unendlichen Mengen – oft Eigenschaften von Mengen kennen, nicht aber im Stande sind, all ihre Glieder aufzuzählen. Als Menschen verfügen wir nur über eine endliche Lebensdauer, weshalb die Aufzählung aller Elemente einer unendlichen Menge – wie z.B. der Menge der natürlichen Zahlen, der rationalen oder irrationalen Zahlen – selbst in der Theorie nicht realisierbar ist. Aus diesem Grund kann unser Wissen über solche Mengen ausschließlich auf einer Inhaltsdefinition basieren.

Dieses Bewusstsein ist für die Definition der Zahl in dreierlei Hinsicht von Bedeutung. Zum einen bilden die Zahlen selbst eine unendliche Menge, weshalb sie nicht durch das Aufzählen ihrer Elemente bestimmt werden können, und zum anderen stellen endliche Mengen, d.h. Mengen mit einer gegebenen Zahl von Elementen, vermutlich selbst eine unendliche Menge dar. Nicht zuletzt streben wir eine Definition des Begriffes „Zahl“ von der Art an, dass unendliche Zahlen denkbar sind. Aus diesem Grund muss die Rede von der Zahl der Elemente einer unendlichen Menge möglich sein, denn diese muss unter Zuhilfenahme ihrer sie auszeichnenden und für all ihre Elemente gemeinsamen Eigenschaften definiert werden.

Bei der Definition der Zahl soll die Aussage „x ist eine Zahl“ insofern gerechtfertigt werden, als man zeigt, dass sie nicht „leer“ ist. Unter Berücksichtigung der Behauptung Russells, dass Zahlen Eigenschaften von Mengen sind, leuchtet es ein, dass „die Zahl ein Mittel ist, gewisse Mengen zusammenzufassen, nämlich diejenigen, die eine gewisse Zahl von Elementen haben“.[7] In der Vorstellung von Russell kann man sich alle Paare, Trios usw. jeweils zu einem Bündel vereinigt denken und erhält so verschiedene Bündel von Mengen, wobei jedes Bündel aus allen Mengen mit einer bestimmte Zahl von Gliedern besteht. Dabei ist jedes Bündel eine Menge, deren Glieder ebenfalls Mengen sind und folglich jede von ihnen eine Menge von Mengen ist.

[7] RUSSELL: Einführung, S 19.

Um entscheiden zu können, ob zwei Mengen zum gleichen Bündel gehören, ist es nötig, die Zahl der Glieder zu ermitteln. Dabei müssen zum einen die Definition der Zahl und zum anderen die Ermittlung der Anzahl der Glieder einer Menge als bekannt vorausgesetzt werden. Um einen Zirkelschluss zu vermeiden, darf die Definition der Zahl weder von der These ausgehen, dass alle Zahlen endlich sind, noch das Zählen – bei dem die Zahlen Anwendung finden – zur Definition der Zahl verwendet werden. Russell führt des Weiteren an, dass der Zählprozess logisch betrachtet ein kompliziertes Verfahren ist, welches nur bei der Bestimmung der Zahl der Elemente einer endlichen Menge angewendet werden kann.

> Exkurs: Eine andere Herangehensweise an diese grundlegenden Fragen, wie der Definition der Zahl und des Zählprozesses, wählt Dr. Felix Kaufmann in *Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung*. Ihm zufolge erweisen sich die (natürlichen) Zahlen als logische Abstrakte eines schrankenlos fortsetzbar gedachten, jedoch idealisierten Zählprozesses, da ihm faktisch eine obere Schranke gesetzt ist. Um sich dessen bewusst zu werden, muss man sich in Erinnerung rufen, was über ein Objekt im Rahmen eines Zählprozesses ausgesagt wird, von dem etwa behauptet wird, dass es „das Dritte" sei. Es besagt lediglich, dass ihm ein „Zweites" und diesem wiederum ein „Erstes" – welches bestimmt wird durch den Mangel eines Vorgängers – beim Zählen vorausgegangen ist. Dabei handelt es sich noch keineswegs um eine hinreichende Kennzeichnung des Dritten, da ein Viertes, Fünftes usw. ebenfalls ein Erstes und Zweites voraussetzen. Das Dritte ist eben genau dadurch charakterisiert, dass außer dem Ersten und dem Zweiten nichts vorausgesetzt wird. Dr. Felix Kaufmann[8] definiert aus diesem Grund jede Zahl als eine logische Singularität, die eindeutig durch bestimmte Unverträglichkeitsbeziehungen definiert wird.[9] Die Zahlenreihe erweist sich somit als unbegrenzte Überlagerungen von Unverträglichkeitsbeziehungen über ein „erstes" Element in dem Maße, dass der unmittelbare Nachfolger einer Zahl gerade eine Unverträglichkeitsbeziehung abgesehen von denjenigen, die seinen

[8] Kaufmann, Felix: Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung : eine Untersuchung über den Grundlagen der Mathematik / Felix Kaufmann. – Leipzig ; Wien : Deuticke. Dr. Felix Kaufmann (4. Juli 1895, Wien – 23 Dezember 1949, New York) war von 1922 bis 1938 als Privatdozent der Rechtsphilosophie an der Universität Wien tätig.

[9] Diese Unverträglichkeitsbeziehungen sind ihr zwar mit jeder größeren Zahl gemein, aber für sie allein werden sie verknüpft unter Ausschließung jedweder anderen Unverträglichkeitsbeziehung.

> „unmittelbaren Vorgänger“ definieren, einschließt. Somit ist jede beliebige natürliche Zahl eindeutig durch Unverträglichkeitsbeziehungen bestimmt.[10]

In der Tat ist es jedoch einfacher zu eruieren, ob zwei Mengen die gleiche Zahl von Elementen besitzen – in der Art, dass jedem Element der einen Menge ein Element der zweiten Menge zugeordnet werden kann –, als ihre genaue Zahl anzugeben.[11] In diesem Fall werden die beiden Mengen „äquivalent“ genannt und der Akt des Zählens besteht darin, dass zwischen der Folge der gezählten Elemente und den natürlichen Zahlen mit Ausnahme der Null eine eindeutige Beziehung aufgestellt wird. Es ist allgemein nachvollziehbar, dass die Anzahl der Elemente gleich der letzten – beim Zählprozess verwendeten – Zahl ist. Unter der Voraussetzung, dass die Menge endlich ist und mit Beschränkung auf endliche Zahlen, gibt es gerade n Zahlen von 1 bis n. Bedingt durch diese Tatsache, dass zwei Mengen dann und nur dann äquivalent sind, wenn sie die gleiche Anzahl von Elementen besitzen, lässt sich die Schlussfolgerung ziehen, dass es sich bei der letzten gezählten Zahl um die Zahl der Elemente der endlichen Menge handelt. In Bezug auf seine Ausführungen schreibt Russell im Anschluss daran:

> Der Begriff der Äquivalenz ist logisch bei der Operation des Zählens vorausgesetzt und logisch einfacher, obwohl wir mit ihm weniger vertraut sind. Beim Zählen muß man die zu zählenden Gegenstände in einer gewissen Ordnung folgen lassen, als erstes, zweites, drittes usw., aber das Wesen der Zahl besteht nicht in der Ordnung: Die Ordnung ist, logisch gesprochen, ein Zusatz ohne Bedeutung, eine unnötige Komplikation. Der Begriff der Äquivalenz setzt nicht den Begriff der Ordnung voraus.

[10] Die soeben gemachte Aussage muss insofern eingeschränkt werden, als jede Beziehung zwischen den Beziehungsgliedern, welche die Unverträglichkeitsbeziehungen kreuzen würde, ausgeschlossen werden muss.

[11] Zur Erläuterung führt Russell folgendes Beispiel an: Ohne die Existenz von Polyandrie bzw. Polygynie wäre die Zuordnung von Ehemann und Ehefrau selbst ohne der Kenntnis über deren tatsächliche Zahl eindeutig, denn: Eine eindeutige Beziehung zweier Elemente x und y einer Menge zeichnet sich dadurch aus, dass, wenn x in einer bestimmten Beziehung zu y steht, kein anderes Element x’ die gleiche Beziehung zu y und x dieselbe Beziehung außer zu y zu keinem anderen Element y’ aufweist.

> […] Auch verlangt der Begriff der Äquivalenz nicht, dass einander äquivalente Mengen endlich sind.[12]

1.2 Definition der „Zahl“

Bei der nun folgenden Definition der Zahlen stößt man laut Russell auf Relationen, die auf den ersten Blick paradox erscheinen. Aus diesem Grund fordert er ein, dass man sich von der Vorstellung, dass etwa die Menge der Paare verschieden von der Zahl 2 ist, abwendet, da keine Unsicherheit über die Menge der Paare und ihrer Definition besteht. Im Gegensatz dazu erscheint die Zahl 2 in irgendeinem Sinn etwas „Metaphysisches“ zu sein, deren Existenz und Begründung mit unseren begrenzten Mitteln nie vollends gesichert werden kann. Eben darum hält es Russell für sinnvoller, sich etwa mit der Menge der Paare zu begnügen und formuliert folgende Definition der Zahl:

> *Die Zahl einer Menge ist die Menge aller ihr äquivalenten Mengen. […] Mit anderen Worten: Eine Zahl (allgemein) ist eine Menge, die die Zahl einer ihrer Glieder ist; oder noch einfacher: Eine Zahl ist irgendetwas, das die Zahl einer Menge ist.*[13]

Auf dem ersten Blick scheint eine solche Definition ihrem Wortlaut nach einen Zirkelschluss zu implizieren, doch dem ist nicht so, da Russell „die Zahl einer (gegebenen) Menge“ ohne Verwendung des allgemeinen Begriffs der Zahl definiert. Auf diese Weise wird die Zahl allgemein definiert ohne irgendeinen logischen Irrtum zu begehen. In der Tat sind derartige Verfahren und Definitionen wie die obige üblich, zumal sie sich nicht nur als legitim, sondern in vielen Fällen als notwendig erweisen.[14]

---

[12] Vgl. RUSSELL: Einführung, S 23. z.B.: Betrachtet man auf der einen Seite die Menge der natürlichen Zahlen (mit Ausnahme der Null) und auf der anderen Seite die Menge der rationalen Zahlen, so kann man durch folgende Zuordnung der jeweiligen Elemente die Äquivalenz der beiden Mengen beweisen: $1\rightarrow{}^{1}/_{1}$, $2\rightarrow{}^{1}/_{2}$, $3\rightarrow{}^{1}/_{3}$, … Vgl. RUSSELL: Einführung, S 23.

[13] Der Begriff der Menge wird an dieser Stelle zunächst noch als undefinierter Grundbegriff gebraucht. In Russells Beispiel ist die Zahl eines Paares demnach die Menge aller Paare und diese ist wiederum die Zahl 2. Die auf diese Weise durch Russell definierten Zahlen verlieren „alles Metaphysische“ und werden zu einem bestimmten und unzweideutigen Begriff. Vgl. RUSSELL: Einführung, S 24f.

[14] Als Beispiel für diese Art des Vorgehens führt Russell folgende Definition der Quadratzahlen an: „ […] wenn wir Quadratzahlen zu definieren haben, so müssen wir erst definieren, was wir unter dem

Russell rechtfertigt demnach sein Verständnis des Zahlenbegriffs indem er die „Zahl als Zahl einer Menge“ versteht, wobei ihm bewusst ist, dass die Annahme oder Ablehnung seiner – nicht „beweisbaren“ – Interpretation von der jeweiligen individuellen Auffassung bestimmt ist. Des Weiteren ist es eine Frage, eine Definition der Zahlen für endliche Mengen zu geben, jedoch eine andere, diese auch für unendliche Mengen nachzuweisen. Es ist diesbezüglich unerlässlich, zwischen dem Postulat der Existenz der unendlichen Mengen und der Etablierung einer Korrespondenz zwischen Zahlen und Mengen zu differenzieren.[15]

Die Mehrheit der Mathematiker hat basierend auf dem Aspekt, dass der Gegenstandsbereich der Arithmetik nicht endlich ist, versucht, sich der Existenz unendlicher Mengen mit erkenntnistheoretischen und nicht mit ontologischen Argumenten zu versichern. Um jedoch eine unendliche Menge „erzeugen“ zu können, muss man zuvor die unendliche Wiederholbarkeit der dafür notwendigen Operationen, wie z.B. der Operation des Zählens, einfordern. Die Möglichkeit, eine unendliche Menge durchzählen zu können, erscheint uns dabei aus zwei Gründen durchaus vorstellbar. Es kann sich dabei einerseits lediglich um das Erwägen einer Möglichkeit handeln oder aber das Zählen unterliegt als ein mentaler Vorgang keinen bzw. ausschließlich rein logischen Einschränkungen. In der Tat ist es jedoch so, dass man – wie auch Russell an dieser Stelle betont – durch bloßes Zählen nie zu unendlichen Gesamtheiten kommt, denn er hält es für eine empirische Tatsache, dass unser Verstand nicht im Stande ist, die gleichen Schritte endlos zu wiederholen. Aus diesem Grund findet man heute die einhellige Meinung vor, dass wir die Existenz von unendlichen Zahlen und Mengen nicht beweisen können.

Indes findet man parallel dazu die These, dass irgendwelche unendlichen Mengen in der Welt existieren im sogenannten „Unendlichkeitsaxiom“, denn Russell erscheint die Annahme der Existenz unendlicher Gesamtheiten in der Welt trotz des Mangels an Beweisbarkeit logisch zwingender zu sein als die gegenteilige finitische Hypothese. Obwohl es keine Methode zu geben scheint, das Axiom auf seine Richtigkeit oder Falschheit hin zu prüfen, hält Russell die Existenz des Aktual-Unendlichen für plausibel und notwendig, nicht zuletzt auf Grund des Umstandes, dass Peanos Axiome in ihrer Gesamtheit dessen Existenz implizieren.

Quadrat einer Zahl verstehen, und dann definieren wir die Quadratzahlen als diejenigen Zahlen, die Quadrate von anderen Zahlen sind.“ Vgl. RUSSELL: Einführung, S 25.

[15] Hierfür konstruiert Russell ein mengentheoretisches Modell, welches die fünf Axiome von Peano erfüllt.

Zumal es also keinen logischen Grund gibt, der gegen die Existenz unendlicher Mengen spricht, ist eine Untersuchung der Hypothese der Existenz solcher Mengen berechtigt. Russell schreibt hierzu: „Für unseren jetzigen Zweck ist die praktische Form dieser Hypothese die Annahme: Wenn n eine beliebige induktive Zahl ist, so soll n nicht gleich $n+1$ sein.“[16]

1.2.1 Induktive Zahlen

Bereits einer der fünf Grundsätze Peanos besagt, dass es keine zwei induktiven Zahlen mit demselben Nachfolger gibt.[17] Betrachtet man nun die Gesamtheit der induktiven Zahlen so stellt man fest, dass es sich um eine wohldefinierte Menge handelt, denn: Nach Russell ist eine Kardinalzahl zunächst eine Menge von Mengen, die alle miteinander, aber mit keiner anderen Menge äquivalent sind. Als „induktive Zahlen“ werden ferner diejenigen unter den Kardinalzahlen definiert, welche zur Nachkommenschaft der Null in Hinsicht auf die Beziehung von n zu $n+1$ gehören. Damit sind jene Zahlen gemeint, die jede Eigenschaft der Null und der Nachfolger von Zahlen mit derselben Eigenschaft aufweisen, wobei der „Nachfolger“ von n die Zahl $n+1$ ist. Die Menge der „induktiven Zahlen“ ist somit gänzlich definiert. Durch die allgemeine Definition der Kardinalzahl einer gegebenen Menge als die Menge aller ihrer äquivalenten Mengen, ist die Zahl der Elemente in der Menge der induktiven Zahlen zu definieren als „all diejenigen Mengen, die der Menge der induktiven Zahlen äquivalent sind.“[18] Diese Menge von Mengen ist gemäß der Definition Russells die Zahl der induktiven Zahlen. Dass aber eben diese Zahl selbst keine induktive Zahl ist, zeigt sich durch folgende Überlegung. Ist n eine induktive Zahl, dann ist die Zahl der Zahlen von 0 bis n einschließlich der beiden Grenzwerte gleich $n+1$. Folglich ist die Gesamtzahl der induktiven Zahlen größer als n, ungeachtet der Größe jener induktiven Zahl n. Ordnet man nun die induktiven Zahlen ihrer Größe nach in einer Folge an, so besitzt diese Folge kein letztes Glied. Ist n hingegen eine induktive Zahl, dann hat jede Folge, zu deren Feld n Elemente gehören, ein letztes Element. In diesem Sinne kann man nach Belieben fortfahren.

[16] RUSSELL: Einführung, S 90.
[17] Unter einer „induktiven Zahl“ n versteht Russell eine endliche (natürliche) Zahl, welche die mathematische Induktion ausgehend von der Null befolgt. Wäre also n gleich n+1, so hätten n-1 und n denselben Nachfolger, nämlich n. Dies würde jedoch im Widerspruch zu den Peanoschen Grundsätzen stehen.
[18] RUSSELL: Einführung, S 91.

Aus diesem Grund ist die Zahl der induktiven Zahlen eine neue, von allen anderen verschiedene Zahl, die nicht alle induktiven Eigenschaften aufweist.[19] Eben diese Annahme, dass zumindest manche der induktiven Eigenschaften allen Zahlen zukommen müsse, war die Ursache für die schleichende Entwicklung der Theorie der unendlichen Zahlen. Der erste Schritt für ein besseres Verständnis der unendlichen Zahlen bestand demzufolge darin, diesen Irrtum zu erkennen und zu revidieren. Die Invarianz gegenüber jedweden Operationen, die diese neue Zahl verkleinern oder vergrößern sollten, war der erstaunlichste Unterschied zu den induktiven Zahlen.[20]

1.2.2 Induktive Kardinalzahlen

Da eine Definition der induktiven Kardinalzahlen für das weitere Vorgehen von Nutzen ist, definieren wir zunächst die Folgen der nach der Größe geordneten Kardinalzahlen. Diese sogenannten „Progressionen“ können konstruiert werden durch eine Beziehung des Aufeinanderfolgens, in dem jedes Element der Folge einen Nachfolger besitzt, aber es nur eines gibt, das keinen Vorgänger hat. Weiters gehört jedes Element der Progression zur Nachkommenschaft dieses ersten Elements hinsichtlich der Beziehung „unmittelbarer“ Vorgänger.

Da nach Russell zwei Progressionen ähnliche Beziehungen sind, ergibt sich, dass ihre Bereiche äquivalente Mengen darstellen. Zumal jede Menge, die dem Bereich einer Progression äquivalent ist, selbst der Bereich einer Progression ist, bilden die Bereiche der Progressionen eine Kardinalzahl und zwar die kleinste der unendlichen Kardinalzahlen, die von Cantor mit dem hebräischen Aleph $\aleph$ mit Index 0 bezeichnet wurde um sie von größeren unendlichen Kardinalzahlen zu unterscheiden.

---

[19] Es kann passieren, dass Null eine bestimmte Eigenschaft besitzt und dass, falls n sie ebenfalls hat, auch n+1 diese aufweist. Nichtsdestoweniger wird diese neue Zahl – so Russell – sie nicht besitzen.

[20] Es war Georg Cantor, der die Invarianz dieser neuen Zahl gegenüber der Addition von Eins zur Definition der von ihm so benannten „transitiven Kardinalzahlen“ gebrauchte. Bertrand Russell hingegen vertritt die Ansicht, dass die Definition einer unendlichen Kardinalzahl als eine Zahl, die nicht alle induktiven Eigenschaften aufweist, besser ist.

Exkurs: Die Behauptung, eine Menge habe $\aleph_0$ Elemente, meint dasselbe wie: Sie ist selbst ein Element aus $\aleph_0$ und das wiederum besagt, dass die Elemente dieser Menge in eine Progression angeordnet werden können. Allem Anschein nach bleibt jede Progression eine Progression, gleichgültig ob man eine endliche Zahl von Gliedern weglässt. Dieses Vorgehen verändert weder ihre Natur noch die Zahl ihrer Elemente, die $\aleph_0$ bleibt. De facto ist jede Auswahl aus einer Progression wiederum eine Progression sofern sie über kein letztes Element verfügt.

Umgekehrt kann man zu den induktiven Zahlen weitere Elemente hinzufügen ohne ihre Zahl dadurch zu vermehren. Als einsichtiges Beispiel kann man hierfür die Brüche heranziehen. Auf dem ersten Blick könnte man womöglich annehmen, dass es bedeutend mehr rationale als ganze Zahlen gibt, da die ganzen Zahlen den Brüchen mit Nenner Eins entsprechen und diese lediglich einen unendlich kleinen Bruchteil der rationalen Zahlen bilden. In der Tat können alle Brüche in einer Progression angeordnet werden weshalb ihre Zahl gleich jener der induktiven Zahlen, nämlich $\aleph_0$, ist.

Gleichwohl besitzen nicht alle unendliche Mengen $\aleph_0$ Elemente. So beträgt z.B. die Zahl der reellen Zahl 2^ $\aleph_0$ und ist somit größer als die Zahl der induktiven Zahlen.[21]

Diese unendlichen Zahlen sind nicht nur nicht induktiv, sondern sie sind auch reflexiv. Cantor bediente sich dieser Eigenschaft für seine Definition des Unendlichen und meinte, dass diese mit dem Nichtinduktivsein gleichwertig sei. Im Gegensatz dazu sind endliche Mengen oder Kardinalzahlen induktiv, denn die Endlichkeit einer Zahl wurde gerade dadurch definiert, dass sie der mathematischen Induktion von null an genügt und eine Menge ist endlich, wenn ihre Zahl endlich ist. In diesem Sinn führt die Definition unweigerlich zu dem Ergebnis, dass die endlichen Zahlen jene Zahlen der „gewöhnlichen“ Zahlenreihe $0,1,2,\ldots$, oder anders gesagt die natürlichen Zahlen, zusammen mit der Zahl Null sind.

[21] Um zu zeigen, dass 2^n größer als n ist – selbst für den Fall, dass n unendlich ist – beweist man zunächst, dass eine Menge mit n Elementen 2^n Teilmengen besitzt. Im Anschluss daran weist man nach, dass die Zahl der Teilmengen einer Menge immer größer ist als die Zahl der Elemente der Menge.

2 Die Folge der natürlichen Zahlen

Die These, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, kann eingangs durch folgende Überlegung aufgestellt werden. Angenommen, die Reihe der natürlichen Zahlen hätte ein Ende, dann gäbe es demzufolge eine größte Zahl. Addiert man zu dieser die Zahl 1, so wäre das Ergebnis größer als die angeblich größte Zahl, die demnach nicht die größte gewesen wäre. Ebenso erhielte man durch die Summe zweier natürlicher Zahlen $a_{n-1} + a_n$ (aus der angeblich endlichen Reihe $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n$) eine neue Zahl, die größer wäre als jede einzelne von ihnen. Das Fazit dieser Überlegungen wird in der axiomatischen Definition der natürlichen Zahlen erfasst: Jede natürliche Zahl hat per Definition einen Nachfolger. Folgerichtig gibt es keine letzte natürliche Zahl, denn diese hätte unweigerlich wiederum ein Nachfolger.[22]

In der Frage nach dem erkenntnistheoretischen Sinn der Unendlichkeit der Zahlenreihe muss bedacht werden, dass es sich hierbei um das Problem handelt, ob dieser Annahme Erkenntnischarakter gebührt, weil sie etwas über die Welt eröffnet. Bei näherer Betrachtung zeigt sich, dass bei diesem Modell der Unendlichkeit die grundsätzliche Schrankenlosigkeit im Zeitlichen zum Vorschein kommt. Der Zählprozess ist als eine zeitlich geordnete Kette von Ereignissen in dem Sinn unabgeschlossen, als sich eine stets neue Ereigniskette bilden lässt, die alle Ereignisse der ersten Kette und noch ein weiteres einschließt. Damit ist jedoch keineswegs gesagt, dass eine unendliche Reihe von Ereignissen apriori „vorliegt". Man meint hier vielmehr, dass, obgleich jede gegebene Reihe von Ereignissen endlich in dem Sinn ist, dass sie durch eine bestimmte natürliche Zahl charakterisiert ist, niemals alle Ereignisse vorliegen können. Das Hinzufügen jedes weiteren Elements der Reihe ist stets der gleiche Prozess ungeachtet der Anzahl der bereits vorliegenden Elemente der Reihe. Die Zahlenreihe als ein „Modell" der Unendlichkeit erweist sich darin als die Unvollendbarkeit eines nach einer bestimmten Regel fortschreitenden Prozesses.

[22] Hierbei muss man zwischen einem Maximum einer Menge und dem Limes unterscheiden, denn: Unter einem „Maximum" einer Menge A versteht man eine obere Grenze – ein Element – die zu A gehört. Im Vergleich dazu ist ein „oberer Limes" eine obere Grenze, die nicht Teil der Menge A ist. Der Limes wird gewöhnlich als eine Größe aufgefasst, der sich andere immer mehr nähern, in einer solchen Weise, dass es unter ihnen solche gibt, die sich um weniger als irgendeine vorgeschriebene Größe von ihr unterscheiden. So ist z.B. die Kardinalzahl $\aleph_0$ der Limes der Kardinalzahlen 1, 2, 3, …, n, …, obgleich die numerische Differenz zwischen $\aleph_0$ und einer endlichen Kardinalzahl konstant unendlich bleibt. Obgleich die endlichen Zahlen vom quantitativen Aspekt aus nicht gegen $\aleph_0$ streben, so ist diese Zahl dennoch der Limes der endlichen Zahlen, da sie in der Zahlfolge unmittelbar nach ihnen kommt. Dabei handelt es sich aber um eine Ordnungs- und nicht um eine Größenbezeichnung.

Bei der Betrachtung eines der Hauptprobleme der Theorie der natürlichen Zahlen – demjenigen der Analyse des Prinzips der vollständigen Induktion – muss zwischen der axiomatischen Bestimmung der natürlichen Zahlen und der klassischen Axiomatik Peanos unterschieden werden, da sich neben einem gewissen Maß an Übereinstimmungen auch Differenzen auftun.

2.1 Die Axiomatik Peano

Die Axiomatik der natürlichen Zahlen von Giuseppe Peano basiert auf den drei Grundbegriffen „0“, „Zahl“ und „Nachfolger“ und der Darlegung ihrer bestehenden, wechselseitigen Beziehungen. Dabei nimmt man an, dass zumindest einige der grundlegenden Begriffe der Arithmetik schlechthin hingenommen werden müssen, da sie für eine Definition zu ursprünglich und elementar sind. Zudem braucht man einen Ausgangspunkt für die Definitionen, denn alle definierten Begriffe werden wiederum durch andere Ausdrücke definiert. Dies ist ferner der Grund, weshalb sich das menschliches Wissen mit einigen einstweilen nichtdefinierbaren Grundbegriffen zufrieden geben muss, wobei eine endgültige Entscheidung darüber noch aussteht. Russell schreibt hierzu:

> Da die menschlichen Kräfte endlich sind, so müssen die uns bekannten Definitionen immer von irgendwelchen Ausdrücken ausgehen, die augenblicklich, aber vielleicht nicht endgültig undefiniert sind.[23]

Die gesamte reine Mathematik inklusive der analytischen Geometrie kann aus der Theorie der natürlichen Zahlen hergeleitet werden, da die darin vorkommenden Begriffe sich mit Hilfe der natürlichen Zahlen definieren lassen und deren Sätze auf den Eigenschaften dieser induktiven Zahlen unter Hinzunahme der Theorie der reinen Logik basieren. Der nächste Schritt besteht darin, diese Theorie auf die kleinstmögliche Zahl von Prämissen und undefinierten Begriffen zurückzuführen, aus denen sie hergeleitet werden kann. Es war die Leistung Peanos, die gesamte Theorie der natürlichen Zahlen mit Hilfe der reinen Logik aus drei Grundbegriffen – „0“, „Zahl“ und

[23] RUSSELL: Einführung, S 8.

„Nachfolger[24] – und fünf Grundsätzen zu konstruieren, die somit zu den Garanten der herkömmlichen reinen Mathematik wurden. Die Wahrheit des gesamten mathematischen Systems basiert also auf der Irrtumsfreiheit des verwendeten logischen Apparats und auf der Wahrheit bzw. auf der Richtigkeit der fünf Grundsätze Peanos, die da lauten:

1. *0 ist eine Zahl.*
2. *Der Nachfolger irgendeiner Zahl ist eine Zahl.*
3. *Es gibt nicht zwei Zahlen mit demselben Nachfolger.*
4. *0 ist nicht der Nachfolger irgendeiner Zahl.*
5. *Jede Eigenschaft der 0, die auch der Nachfolger jeder Zahl mit dieser Eigenschaft besitzt, kommt allen Zahlen zu.*

Anhand dieser fünf Axiome und den drei Grundbegriffen kann die Theorie der natürlichen Zahlen konstruiert werden. Zunächst definiert man 1 als „den Nachfolger von 0", 2 als „den Nachfolger von 1" usw. Mit diesen Definitionen kann man folgerichtig nach Belieben weit gehen, da wegen des zweiten Grundsatzes jede erreichte Zahl einen Nachfolger hat, wobei es sich – so der dritte Grundsatz – bei diesem um keine der bisher definierten Zahlen handelt, denn andernfalls hätten zwei verschiedene Zahlen denselben Nachfolger. Laut dem vierten Axiom kann keine der in Folge der Nachfolger erreichten Zahlen die Null sein, womit die Folge der Nachfolger zu einer endlosen Reihe von immer neuen Zahlen führt. In dieser mit null beginnenden und von einem Nachfolger zum nächsten weiterschreitenden endlosen Reihe kommen – basierend auf dem fünften Grundsatz – alle Zahlen vor, denn es gilt: Gehört eine Zahl n zu einer Reihe, so gilt dies auch für ihren Nachfolger n+1 und demzufolge gehört gemäß dem letzten Satz Peanos jede Zahl zur Folge.

[24] Als „Nachfolger" wird die nächste Zahl in der natürlichen Ordnung der Zahlenfolge bezeichnet, d.h. der Nachfolger von 0 ist 1, der Nachfolger von 1 ist 2 usw. Unter einer „Zahl" wird in diesem Zusammenhang die Menge der natürlichen Zahlen verstanden, wobei Peano nicht annimmt, dass man alle Elemente dieser Menge kennt, sondern lediglich weiß, was mit der Behauptung, dies ist eine Zahl, gemeint ist.

Die vollständige Definition der natürlichen Zahlen ist möglich, sofern man über die Bedeutung der drei Grundbegriffe Peanos Bescheid weiß. Russell geht noch einen Schritt weiter, indem er alle natürlichen Zahlen allein mit der Kenntnis der Bedeutung von 0 und Nachfolger definiert, wobei sein Verfahren „lediglich" im Bereich des Endlichen angewendet werden kann. Diese Beschränkung fördert immerhin zugleich das Verständnis für die Verschiedenartigkeit von Endlichkeit und Unendlichkeit.

Der Umstand, dass man mit den beiden Begriffen „0" und „Nachfolger" jede beliebige gewählte natürliche Zahl durch schrittweises Vorangehen erreichen kann, beweist noch lange nicht den allgemeinen Satz, wonach alle solche Zahlen auf diese Weise von der Null ausgehend erreicht werden können. Demnach liegt das Ziel darin, eine Methode zu finden, durch die man die gesamte Menge bzw. Reihe der natürlichen Zahlen $1,2,3,\ldots$ ohne Verwendung des vagen Begriffs „und so weiter" definieren kann. Die Versuchung besteht nach Russell gerade darin, dass man unter „und so weiter" einen „beliebig endlich oft" wiederholbaren Prozess des Fortschreitens von einem Nachfolger zum nächsten verstehen kann. Da aber das eigentliche Problem in der Definition der „endlichen Zahl" begründet ist, darf man diesen Begriff nicht in der Definition verwenden. Der Schlüssel zu diesem Problem liegt im fünfte Axiom Peanos, besser bekannt als das „Prinzip der vollständigen Induktion".

2.1.1 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Auf den ersten Blick scheint dieser fünfte Grundsatz dem Prinzip der Logik nicht zu genügen. Er besagt allgemein, dass jede Eigenschaft des ersten Elements einer Folge, die gegenüber der Nachfolgebeziehung invariant ist, jedem beliebigen Element der Folge zukommt unter der notwendigen und hinreichenden Bedingung, dass jedes beliebige Glied sich vom ersten her „in endlich vielen Schritten erreichen lässt". Mit anderen Worten: „Was vom Einen auf das Nächste geschlossen werden kann, das kann auch vom Ersten auf das Letzte geschlossen werden"[25], sofern dieses vom Ersten her in endlichen Schritten erreicht werden kann. Das Problem der vollständigen Induktion liegt von daher gerade in der Bloßlegung des logischen Begriffs der „Erreichbarkeit in endlich vielen Schritten" durch die Hinzunahme eines Zeitmoments.

[25] RUSSELL: Einführung, S 34.

Die Quintessenz der vollständigen Induktion liegt nach Felix Kaufmann im Zählprozess, in dem die Unabhängigkeit von einem Zähltakt zum nächsten und das logische Abstrakt der „unendlichen Reihe“ der natürlichen Zahlen im grenzenlosen Fortgang des Zählens ersichtlich werden. Diese Reihe ist weder ein sukzessiv Werdendes, noch eine Ganzheit unendlich vieler für sich seiender Singularitäten, sondern der Bereich der grenzenlosen Superposition von Unverträglichkeiten. Die Gültigkeit des Prinzips der vollständigen Induktion wird mit dem konstitutiven Prinzip der Reihe der natürlichen Zahlen logisch festgelegt. Sie begreift sich dabei keineswegs als ein eigenes Verfahren, sondern als bindende Kraft der Schlussfolgerung eines Induktionsschlusses von beliebig vielen Gliedern. Auf diese Weise kommt man zu dem Ergebnis, dass die axiomatische Definition der natürlichen Zahlen und die Axiomatik Peanos nicht nur äquivalent sind, sondern auch bezüglich ihrer Verfahrensweise konform gehen. Die Vorteile sind demnach darauf zurückzuführen, dass die Bedeutung der Peanoschen Axiomatik vollkommen ersichtlich wird, sowohl im Sinne der Grundbegriffe Peanos, als auch in dem Prinzip der mathematischen Induktion, da die Definition der natürlichen Zahlen[26] durch die Strukturanalyse des Zählprozesses erworben wird. Als Resultat ergibt sich hieraus die Widerspruchslosigkeit der Definition der natürlichen Zahlen als eine Beschreibung der formalen Struktur des schrankenlos gedachten Zählprozesses aus dessen Analyse wiederum die formale „Vollständigkeit“ der Definition folgt. Dank dieser Einsichten kann in diesem Sinn jede natürliche Zahl durch die Statuierung bestimmter Unverträglichkeitsbeziehungen und durch den Ausschluss jeder anderen Unverträglichkeitsbeziehung als „Träger“ dieser bestimmten Beziehung definiert werden, sodass prinzipiell nichts mehr offen bleibt. In diesem Zusammenhang stellt sich eine gewisse Affinität zu der Sichtweise von Bertrand Russell heraus, da er die natürlichen Zahlen unter Zuhilfenahme des Prinzips der mathematischen Induktion definiert:

> Die mathematische Induktion ist eine Definition und kein Prinzip. Es gibt gewisse Zahlen, für die sie gilt, und andere […] für die sie nicht gilt. Wir definieren die „natürlichen Zahlen“ als diejenigen, auf die man die mathematische Induktion bei Beweisen anwenden kann, d.h. als diejenigen,

[26] Russell verwendet den Begriff „natürliche Zahl“ in derselben Bedeutung wie „induktive Zahl“, wobei er den letzteren bevorzugt, da er einen daran erinnert, dass die Definition dieser Zahlenreihe auf die mathematische Induktion zurückgeht.

> die alle induktiven Eigenschaften besitzen. Daraus folgt, daß solche Beweise auf die natürlichen Zahlen angewandt werden können. Dies ist nicht irgendeine mysteriöse Intuition oder irgendein Axiom oder Prinzip. Es folgt vielmehr einfach aus dem Satz selbst. Wenn „Vierfüßler“ definiert sind als Tiere mit vier Füßen, so folgt daraus, daß Tiere, die vier Füße haben, Vierfüßler sind. Ganz ähnlich liegt der Fall der Zahlen, die der mathematischen Induktion genügen.[27]

Russell merkt jedoch an, dass einige Punkte in der Peanoschen Axiomatik nicht endgültig bzw. eindeutig bestimmt sind. Zunächst können die drei Grundbegriffe Peanos auf unendlich viele Arten gedeutet werden und dennoch nach wie vor den fünf Axiomen genügen, denn sobald eine unendliche Folge vorliegt, die keine Wiederholungen aufweist, einen Anfang hat und jedes ihrer Glieder durch endlich viele Schritte erreicht werden kann, dann hat man eine Folge von Elementen, für die Peanos Axiome gelten. Eine solche Folge definiert Russell als eine Progression und fügt dabei Folgendes hinzu:

> Irgendeine Progression kann zur Grundlage der reinen Mathematik gewählt werden. Ihr erstes Glied können wir „0“, die ganze Folge ihrer Glieder „Zahlen“ und das nächste Glied in der Progression „Nachfolger“ nennen. Die Progression braucht nicht aus Zahlen zu bestehen; an ihre Stelle können Raum- oder Zeitpunkte oder irgendwelche andere Elemente treten, wenn es nur unendlich viele gibt. Jede der verschiedenen Progressionen erlaubt eine verschiedene Auslegung aller Sätze der üblichen reinen Mathematik. Alle diese Auslegungen sind gleichberechtigt.[28]

In Peanos System gibt es apriori keine Möglichkeit, zwischen den diversen Interpretationen der Grundbegriffe zu differenzieren. Die Tatsache, dass Peano vielmehr die Kenntnis darüber voraussetzt und die Begriffe nicht durch die fünf Axiome definiert werden können, ist für Russell von immenser Bedeutung, zumal unsere Zahlen nicht allein zur Verifikation mathematischer Formel dienen, sondern auch im Alltag An-

---

[27] RUSSELL: Einführung, S 34.
[28] RUSSELL: Einführung, S 13.

wendung finden sollen. Unser Verständnis und unsere Kenntnis über die Zahlen mag nur hinreichend analysiert sein, doch der Einsatz der Zahlen in der Arithmetik muss diesem Wissen gerecht werden. Und es ist gerade dieser Punkt, den Russell an der Axiomatik Peanos in Frage stellt:

> Man könnte vielleicht den Vorschlag machen: „0“, „Zahl“ und „Nachfolger“ sollen nicht Begriffe darstellen, deren Bedeutung wir zwar kennen, aber nicht definieren können, sondern i r g e n d w e l c h e Elemente, die den fünf Axiomen Peanos genügen. Sie sind dann nicht mehr Elemente, die eine bestimmte, wenn auch undefinierte Bedeutung haben: Es sind veränderliche Elemente geworden, über die wir gewisse Hypothesen machen, nämlich die in den fünf Axiomen aufgestellten. In anderer Hinsicht aber sind sie unbestimmt. Wenn wir diesen Vorschlag annehmen, so sind unsere Sätze nicht für eine bestimmte Folge von Elementen, genannt die natürlichen Zahlen, bewiesen, vielmehr für alle Folgen von Elementen mit gewissen Eigenschaften.[29]

Obgleich eine solche Vorgehensweise gewiss nicht unkorrekt ist und für bestimmte Zwecke eine absolut legitime Verallgemeinerung bildet, führt sie aus zwei Gründen zu keinen geeigneten Grundlagen der Arithmetik. Zum einen ist es nicht sicher, ob sich irgendwelche Folgen von Elementen finden lassen, die den fünf Axiomen Peanos genügen und zum anderen müssen unsere Zahlen für den gewöhnlichen Alltag brauchbar sein und müssen dafür eine bestimmte Bedeutung – die in der Theorie der Arithmetik definiert wird – und nicht nur gewisse formale Eigenschaften aufweisen. Deswegen müssen die drei Grundbegriffe Peanos aus logischen Begriffen abgeleitet werden. Sie müssen „definiert“ werden, um sie zu etwas Bestimmtem zu machen, das man nicht mehr mit unendlich vielen Bedeutungen versehen kann, wie dies der Fall war, als sie lediglich dadurch definiert waren, dass sie den Peanoschen Axiomen entsprachen. Basierend auf der These, dass die Zahl der Individuen in der Welt unendlich ist, gelang Russell dieses Vorhaben und er vermochte mit Hilfe der Definition der natürlichen Zahlen und der Sätze und Begriffe der Logik die fünf Grundsätze als beweisbare Sätze zu formulieren.

[29] RUSSELL: Einführung, S 14.

2.1.2 Russell und Kaufmann: Konsens – Dissens

Der Konsens zwischen Bertrand Russell und Felix Kaufmann basiert auf der Erkenntnis, dass das Prinzip der mathematischen Induktion kein außerlogisches Verfahren in sich schließt und dass es mit der Definition der natürlichen Zahlen eindeutig bestimmt ist. Im Gegensatz zu Kaufmann bedient sich Russell zur Definition des Begriffs der natürlichen Zahl des Terminus der Menge. Kaufmann lehnt diesen Ansatz wegen der Doppeldeutigkeit ab und nimmt seinen Ausgangspunkt in der – heute überholten – Definition Cantors:

> Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen.[30]

Entscheidend ist, dass mit der Definition Cantors die Menge vollständig durch ihre Elemente festgelegt ist und zwei Mengen dann und nur dann „gleich" sind, wenn sie dieselbe Anzahl von Elementen umfassen. Nun kann aber die „Zusammenfassung von Objekten zu einem Ganzen" in der Mengenlehre auf zwei verschiedene Arten erfolgen. Zum einen können Objekte dadurch, dass sie gezählt werden, zusammengefasst werden, da sie auf diese Weise in denselben Zählprozess aufgenommen werden und zum anderen auf Grund einer bestimmten Eigenschaft, die alle Objekte auszeichnet. Gerade in dieser Doppeldeutigkeit des Mengenbegriffs liegt der Grund, weshalb Kaufmann den Ansatz Russells – dem der Definition der natürlichen Zahl basierend auf dem Mengenbegriff – ablehnt.

Zu der Bildung des Mengenbegriffs kam es nach Kaufmann wohl deshalb, weil man die Gemeinsamkeit der zu zählenden Objekte, nämlich „die Zugehörigkeit zu demselben Zählprozess", zu einer Einheit höherer Art hypostasierte, wodurch eine wesentliche Vereinfachung der Sprechweise erzielt wurde. Für diese „Zusammenfas-

[30] Vgl. KAUFMANN: Unendliche, S 96. Kaufmann analysiert zunächst die Begriffe „bestimmt" und „wohlunterschieden", wobei die Forderung der Bestimmtheit dann eingelöst ist, wenn von jedem beliebigen Objekt feststeht, ob es Element der fraglichen Menge ist oder nicht. Dagegen ist die Forderung der Wohlunterschiedenheit dann erfüllt, wenn für irgendein Element A und irgendein Element B feststeht, ob sie begriffsmäßig identisch oder verschieden sind.

sung“ von Objekten zu einem „Gegenstand höherer Ordnung“ sprach der Umstand, dass diese von vornherein in einem bestimmten Raumgebiet „zusammengefasst“ auftraten. Versteht man nach Kaufmann den Begriff „Menge“ jedoch als eine eigenschaftsbezogene Zusammenfassung von Objekten und begeht man den Fehler, die „Gegenstände der Anschauung“ (empirische Einzeldinge) und die „Gegenstände des Denkens“ (Zahlen) nicht klar gegeneinander abzugrenzen, dann tritt eine Analogie zwischen den Eigenschaften von Körperdingen und den „Eigenschaften“ von Zahlen auf, wobei sich letztere – so Kaufmann – als „relative Unverträglichkeitsbeziehungen“ darstellen. Im Gegensatz zu Russell benötigt man seiner Ansicht nach für die Formulierung legitimer mathematischer Aussagen nicht den Begriff der Menge, mehr noch:

> […] wo hingegen dieser [Mengenbegriff; Anm. EL] – bzw. der ihm entsprechende der „mathematischen Eigenschaft“ – unentbehrlich erscheint, da liegen sinnlose, pseudomathematische Sätze vor.[31]

Indes waren – und sind es noch – mit dem Verständnis des Mengenbegriffs in der Mengenlehre Cantors eine Reihe von Antinomien verbunden, deren Ausschaltung den Mathematikern immense Schwierigkeiten bereitet hat. Von daher ist es für Kaufmann nachvollziehbar, dass Russell als jener Forscher, der den Kampf gegen diese Paradoxien mit der größtmöglichen Entschiedenheit in Angriff nahm und sich mit den Grundlagenproblemen der Mathematik am erbittertsten auseinandersetzte, an der Unentbehrlichkeit des Mengenbegriffs zweifelte und die Mengen lediglich als „logische Fiktionen“ bezeichnete. Nichtsdestoweniger verweist Kaufmann in Hinblick auf die Analysen Russells eindringlich auf die Zwiespältigkeit des Begriffs der Menge und meint hierzu:

> Mit den Unklarheiten, welche den Begriff der Menge betreffen, verschwinden auch diejenigen bezüglich des Begriffes der Folge. Eine Folge ist definiert durch ein Gesetz, wodurch jeder natürlichen Zahl eine bestimmte Zahl ein-eindeutig zugeordnet wird. Ein solches Bildungsgesetz

[31] KAUFMANN: Unendliche, S 97.

> aber definiert keineswegs eine transfinite Totalität, sondern lediglich eine Ordnungsrelation zwischen Zahlen bestimmter „Eigenschaften“.[32]

Kaufmann bemerkt hierbei, dass eine Aussage über das „allgemeine Glied einer Folge“ nicht eine mathematische Transformation einer Beziehung zur Folge hat, welche ursprünglich auf eine unendliche Mannigfaltigkeit einzelner Elemente ginge. Vielmehr ist sie der angemessene Terminus für den generellen Charakter jener Beziehung, demgegenüber die Anwendung auf eine bestimmte Zahl in logischer Hinsicht zurücksteht. Dies ist insofern von Bedeutung, als man bei der Analyse der irrationalen Zahlen und der transfiniten Ordinalzahlen erkennen kann, wie Sätze über unendliche Mengen in Sätze über Folgen abgewandelt werden können, wodurch ihr allem Anschein nach transfiniter Charakter verschwindet. Es ist laut Kaufmann allerdings nicht erlaubt, eine Folge in solcher Weise als Totalität aufzufassen, wie dies z.B. bei Cantors Definition der irrationalen Zahlen durch Fundamentalreihen erfolgt, denn:

> Ebenso unzulässig wie die Definition der Irrationalzahl durch einen Schnitt im Gebiet der rationalen Zahlen ist diejenige der Gleichsetzung der beschränkten Folge mit der Irrationalzahl.[33] Denn diese Folge kann nicht als Totalität vorliegen, sondern nur durch ein Bildungsgesetz bestimmt sein. Mit diesem Bildungsgesetz aber rechnet man keineswegs, wenn man mit Irrationalzahlen rechnet. […] Die Definition eines Begriffes ist aber […] nur dann korrekt, wenn sie den Sinn wiedergibt, der diesem Begriff im Gebrauch zukommt.[34]

Tritt das Risiko der Anwendung von nicht eindeutig definierten Symbolen bereits beim Mengenbegriff auf, so zeigt sich bei den sogenannten Erweiterungen des Zahlenbegriffes, die zur Bildung des Begriffes der Irrationalzahl führen, diese Gefährlichkeit noch vehementer. Man setzte hierfür bei den zu den Grundoperationen inversen Operationen an, doch die Ansicht, dass die Einführung neuer Symbole auch etwas sachlich Neues bringe, sprich neue mathematische Gegenstände „erzeuge“, war ein

[32] KAUFMANN: Unendliche, S 102.
[33] Dies entspricht der Cantorschen Definition der irrationalen Zahl durch eine Fundamentalreihe.
[34] KAUFMANN Unendliche, S 126f.

fundamentaler Irrtum, der unheilvolle Folgen mit sich brachte. Tatsächlich sind die allgemein anerkannten Aussagen über diese neuen Zahlen und die ihnen zugehörigen Verfahren nichts anderes als Axiome über natürliche Zahlen und ihre Operationen. Freilich hoben die renommiertesten Mathematiker wiederholt die Vorrangstellung der natürlichen Zahlen hervor, doch Kaufmann bemängelt, dass an den beiden entscheidendsten Stellen, nämlich der Definition des Grenzwertes und derjenigen der Irrationalzahlen, die Zusammenhänge vielfach nicht ausreichend nachvollzogen wurden. Aus diesem Grund wenden wir uns nun den Erweiterungen des natürlichen Zahlenbegriffs und seiner Problematik zu.

EXKURS: Primzahlen – die multiplikativen Bausteine der natürlichen Zahlen

Die Primzahlen[35], die – oberflächlich gesehen – innerhalb der Menge der natürlichen Zahlen „lediglich" eine Teilmenge bilden, sind bei näherer Betrachtung von immenser Bedeutung, denn sie sind die multiplikativen Bausteine der natürlichen Zahl, d.h. mit ihnen können alle natürliche Zahlen (mit Ausnahme der Zahl 1) multiplikativ aufgebaut werden. Aus diesem Grund können die Primzahlen als Teilmenge und sozusagen als „Erzeugende" der natürlichen Zahlen zur Analyse der abzählbar unendlichen Mengen hinsichtlich der Frage nach dem Unendlichen herangezogen werden, da Charakteristika, die für eine Teilmenge bewiesen wurden, erwartungsgemäß auf die „Obermenge" übertragen werden können.

Oft gibt es verschiedene Möglichkeiten, eine natürliche Zahl in ein Produkt von möglichst kleinen von 1 verschiedenen Faktoren zu zerlegen. Eine genauere Untersuchung der Produktfaktoren legt die Annahme nahe, dass die verschiedenen Zerlegungen auf eine gemeinsame und eindeutige Zerlegung zurückgeführt werden können. Um diese Vermutung nachfolgend zu beweisen, betrachtet man zunächst die kleinsten Teiler[36] einer gegebenen natürlichen Zahl und stellt folgenden *Satz* auf*:* „Der kleinste, von 1 verschiedene Teiler einer natürlichen Zahl $a > 1$ ist stets eine Primzahl p."

[35] Definition: Eine natürliche Zahl *p* > 1 heißt Primzahl, wenn *p* nur die (trivialen) Teiler ±1 und ±*p* besitzt.
[36] Die Zahl 1 wird dabei ausgeschlossen, da 1 Teiler jeder natürlichen Zahl ist.

Beweis: Für die Beweisführung müssen die Fälle „*a* ist eine Primzahl" und „*a* ist keine Primzahl" unterschieden werden.

1. Fall: Handelt es sich bei der natürlichen Zahl *a* um eine Primzahl, dann besitzt *a* per Definition nur die trivialen Teiler 1 und *a*. Folglich ist der kleinste, von 1 verschiedene Teiler von *a* die Zahl *a*, somit eine Primzahl.

2. Fall: Wenn die von 1 verschiedene natürliche Zahl *a* keine Primzahl ist, dann besitzt sie neben den beiden trivialen Teilern mindestens einen weiteren (nichttrivialen) Teiler *t'*, für den gilt $1 < t' < a$. Da es folglich nur endlich viele nichttriviale Teiler von a gibt, besitzt diese Menge einen kleinsten Teiler *t* mit $t \neq 1$. Die Behauptung, dass dieser kleinste Teiler von *a* eine Primzahl ist, wird nun indirekt bewiesen: Angenommen $t \neq 1$ ist keine Primzahl, dann hätte dies zur Folge, dass dieser kleinste Teiler von a neben den beiden trivialen Teilern 1 und *t* noch mindestens einen weiteren nichttrivialen Teiler t_1 hat mit $1 < t_1 < t$. Da laut Voraussetzung dann gilt, dass $t_1 | t$ und $t \mid a$, gilt – aufgrund der Transitivität[37] der natürlichen Zahlen – ebenfalls $t_1 \mid a$ mit $1 < t_1 < t$. Somit führt die zuvor getroffene indirekte Annahme zu einem Widerspruch, da laut Voraussetzung *t* der kleinste Teiler von *a* sein soll. Mit $t_1 \neq 1$ und $t_1 < t$ hätten wir eine noch kleinere Zahl, die ebenfalls ein Teiler von a wäre. Daher war diese Annahme falsch.

Folglich gilt auch in diesem zweiten Fall, dass der kleinste Teiler $t \neq 1$ eine Primzahl ist, womit der Satz vollständig bewiesen ist.

Die natürlichen Zahlen können allgemein in zwei „Gruppen" eingeteilt werden: In jene, die bereits per Definition als Primzahlen charakterisiert werden und jene anderen natürlichen „zusammengesetzten" Zahlen, die neben den beiden trivialen Teilern noch mindestens eine Primzahl als weiteren Teiler besitzen.

Man kann also eine gegebene natürliche Zahl durch systematisches Abspalten von Primzahlen (der Größe nach aufsteigend) als ein Produkt von Primfaktoren darstellen, wobei sich die Frage stellt, ob dieses Verfahren nach endlich vielen Schritten

[37] Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt: Aus $a \mid b$ und $b \mid c$ folgt $a \mid c$.

(Abspaltungen) mit einer „letzten“ Primzahl endet oder ob es zusammengesetzte Zahlen gibt, bei denen sich diese Vorgehensweise endlos fortsetzen lässt und es keine „abgeschlossene“ – und damit verbunden auch keine eindeutige – Primfaktorenzerlegung gibt.

Um die zu Beginn getroffene Vermutung, dass sich für jede natürliche Zahl $a > 1$ eine eindeutige Primfaktorenzerlegung finden lässt, zu beweisen, muss zuvor generell noch gezeigt werden, dass „jede von 1 verschiedene natürliche Zahl mindestens eine Primfaktorenzerlegung besitzt.“

> *Beweis:* Die Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ seien die der Reihe nach abgespalteten Teiler einer gegebenen natürlichen Zahl a und $n_1, n_2, n_3, \ldots$ die verbleibenden Produktfaktoren von a. Für die Beweisführung müssen die Fälle „a ist eine Primzahl“ und „a ist keine Primzahl“ unterschieden werden.
>
> *1. Fall:* Ist a eine Primzahl, dann gilt, dass $a = p_1$ die gesuchte Primfaktorenzerlegung von a ist. (Q.e.d.)
>
> *2. Fall:* Ist a keine Primzahl, dann kann man den kleinsten, von 1 verschiedenen Teiler p_1 von a abspalten und man erhält $a = p_1 \cdot n_1$ mit $1 < n_1 < a$.
>
> Falls n_1 eine Primzahl ist, so liegt damit die gesuchte Primfaktorenzerlegung vor und der Beweis ist fertig. Ist n_1 jedoch keine Primzahl, dann kann man wiederum den kleinsten, von 1 verschiedenen Teiler p_2 von n_1 abspalten, sodass $n_1 = p_2 \cdot n_2$ mit
>
> $1 < n_2 < n_1$. Demnach gilt a = $p_1 \cdot n_1 = p_1 \cdot p_2 \cdot n_2$.
>
> Falls n_2 eine Primzahl ist, so liegt die gesuchte Primfaktorenzerlegung vor und der Beweis ist fertig. Ist n_2 aber keine Primzahl, dann kann man analog den kleinsten, von 1 verschiedenen Teiler p_3 von n_2 abspalten und erhält $n_2 = p_3 \cdot n_3$ mit $1 < n_3 < n_2$. Insgesamt gilt: $a = p_1 \cdot p_2 \cdot n_2 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot n_3$.

Falls n_3 eine Primzahl ist, verfügt man hiermit über die gesucht Primfaktorenzerlegung. Andernfalls führt man dieses Verfahren analog weiter.

Wegen $n_1 > n_2 > n_3 > \ldots > 1$ gilt: Da es zwischen einer gegebenen natürlichen Zahl a und 1 nur endlich viele natürliche Zahlen gibt, muss die Zerlegung in den zunehmend kleineren Faktoren nach endlich vielen Schritten mit einer Primzahl $n_k = p_{k+1}$ zu einem Ende kommen und man erhält als eine Primfaktorenzerlegung von a die Zerlegung

$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_{k+1}$. (Q.e.d.)

Spaltet man von einer natürlichen Zahl fortlaufend Primzahlen ab, so wird der verbleibende positive Faktor zunehmend kleiner, bis es sich bei diesem selbst um eine Primzahl handelt und das Verfahren nach endlich vielen Schritten zu einem Ende kommt. Auf diese Weise erhält man für jede natürliche Zahl $a > 1$ eine Primfaktorenzerlegung und es lässt sich nun zeigen, dass diese (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutig ist.

Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie: *„Jede von 1 verschiedene natürliche Zahl besitzt (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eine eindeutige Primfaktorenzerlegung.“*

Beweis: Die Beweisführung wird in zwei Schritten vollzogen. Basierend auf dem Beweis der Existenz einer Primfaktorenzerlegung folgt im Anschluss daran der Beweis der Eindeutigkeit der Zerlegung.

▪ *Beweis der Existenz der Primfaktorenzerlegung:* Dass jede natürliche Zahl $a > 1$ (mindestens) eine Zerlegung besitzt, wurde im Beweis des vorigen Satzes bereits ausführlich gezeigt und wird daher an dieser Stelle lediglich mittels Induktion kurz skizziert: Sei $a = 2$, dann ist a eine Primzahl und es gibt nichts Weiteres zu tun. Induktionsvoraussetzung: Die Annahme der Existenz einer Primfaktorenzerlegung ist richtig für alle

$k \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq k \leq a$.

Es ist nun zu zeigen, dass die Annahme auch für $a+1$ richtig ist: Ist $a+1$ eine Primzahl, dann gibt es nichts Weiteres zu tun. Ist $a+1$ keine Primzahl, dann existieren $m, n \in \mathbb{N}$ mit $a+1 = m \cdot n$, $m \neq 1$, $m \neq a+1$; $n \neq 1$, $n \neq a+1$.

Also: $2 \leq m \leq a$, $2 \leq n \leq a$. Daher sind m und n Produkte von Primzahlen, somit auch $a+1 = m \cdot n$.

▪ *Beweis der Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung:* Man beweist die Eindeutigkeit indirekt, in dem man annimmt, dass mindestens eine natürliche Zahl a zwei (oder auch mehrere) verschiedene Primfaktorenzerlegungen besitzt.

Sei $a \in \mathbb{N}$. Es gilt: $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$. Hierbei sind p_i (i = 1,2,…,r) und q_j ($j = 1,2,\ldots,s$) Primzahlen und o.B.d.A. sei $r \leq s$. Da $p_1 | p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$, gilt auch $p_1 | q_1 \cdot \ldots \cdot q_s$ und $p_1 | q_j$ für ein $j \in \{1, \ldots, s\}$.

Durch Umnummerieren ($j \leftrightarrow 1$) folgt: $p_1 | q_1$. Somit gilt: $p_1 = q_1$ und $q_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$. Da q_1 eine Primzahl ist (und demnach $q_1 \neq 0$ gilt), kann man somit kürzen und erhält: $p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$. Dieses Verfahren wiederholt man und erhält so: $p_2 = q_2$, $p_3 = q_3$, … Wäre $r < s$, dann erhielte man die Gleichung: $1 = q_{r+1} \cdot \ldots \cdot q_s$. Wegen q_{r+1} teilt die rechte Seite der Gleichung, gilt: $q_{r+1} | 1$. Damit würde jedoch folgen, dass $q_{r+1} \leq 1$ wäre. Die Annahme führt somit in einen Widerspruch, denn da q_{r+1} eine Primzahl ist, muss sie größer 1 sein. Daher gilt, dass $r = s$ ist und folglich gilt $p_1 = q_1$ ($i = 1,\ldots,r$). (Q.e.d.)[38]

Die Tatsache, dass jede von 1 verschiedene natürliche Zahl eindeutig als Produkt von Primzahlen dargestellt werden kann, ist nicht nur für die Frage nach der Anzahl der Primzahlen relevant, denn: Angenommen, es gäbe nur endlich viele Primzahlen, so könnten diese auch nur endlich viele natürliche Zahlen „erzeugen“. Diese Annahme hätte die Konsequenz, dass die Menge der natürlichen Zahlen endlich wäre und

[38] Dieser Satz zeigt auch den Grund, weshalb die Zahl 1 nicht zu den Primzahlen gehört. Wäre 1 eine Primzahl, so besäße jede natürliche Zahl beliebig viele verschiedene Primfaktorenzerlegungen und der Hauptsatz wäre somit falsch. Insbesondere verdeutlicht der Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie, dass die Primzahlen die multiplikativen Bausteine der natürlichen Zahlen sind.

es somit eine letzte und größte natürliche Zahl a gäbe. Dies widerspricht allerdings unserer These von der Unendlichkeit der natürlichen Zahlenreihe.

Betrachtet man nun die Verteilung der Primzahlen in der Menge der natürlichen Zahlen, so entdeckt man starke Unregelmäßigkeiten. Neben vielen eng benachbarten Primzahlen, den sogenannten Primzahlzwillingen[39], fällt bei näherer Betrachtung von verschieden großen Intervallen auf, dass der Anteil an Primzahlen mit zunehmender Intervalllänge deutlich sinkt (siehe Tabelle[40]).

Natürliche Zahlen	1 - 10	1 - 100	1 - 1000	1 - 10.000	1 - 100.000	1 - 1.000.000
Primzahlenanteil (in %)	40	25	16,8	12,3	9,6	7,8

Es stellt sich daher die Frage, ob die Primzahlen ab einer gewissen Zahlengröße nicht mehr auftreten und es daher nur endlich viele von ihnen gibt. Doch schon Euklid konnte mit Hilfe seines Beweises zeigen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. In seinem Werk *Die Elemente* schreibt er: „Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen." (Buch IX, Proposition 20) Die heute übliche Formulierung „Es gibt unendlich viele Primzahlen" hätte Euklids Verständnis des Unendlichen widersprochen, da dieser von einem potentiell Unendlichen ausging, inklusive der Möglichkeit, zu einer gefundenen Anzahl an Primzahlen stets eine weitere angeben zu können. Die Vorstellung der aktualen Existenz unendlich vieler Primzahlen lehnte er entschieden ab.

[39] Unter Primzahlzwillingen versteht man zwei Primzahlen, deren Abstand 2 ist, wie z.B.: 11 und 13. Einzige Ausnahme bilden hier die unmittelbar benachbarten Primzahlen 2 und 3.
[40] PADBERG, Friedhelm: Zahlentheorie und Arithmetik / Friedhelm Padberg. – Heidelberg [u.a.] : Spektrum, Akad.-Verl., 1999. S 46.

Der Beweis seiner Aussage ist ebenso einfach wie genial. Man stellt folgende These auf: „Es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$." Diese Annahme kann allerdings nicht stimmen, wenn man die Zahl $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ (das Produkt aller Primzahlen plus eins) betrachtet. Die Zahl a wäre sehr viel größer als p_n und könnte unserer Behauptung zufolge keine Primzahl sein. Ist die Zahl a aber doch eine Primzahl, so gilt: $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1 > p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n > p_i$ (für ein i = 1, …, n). Demnach ist a eine neue Primzahl und die anfangs formulierte These wäre damit widerlegt.

Ist a andererseits keine Primzahl, dann muss sie einen von Eins und ihr selbst verschiedenen Teiler besitzen. Ist a teilbar, dann ist der kleinste Teiler von a eine Primzahl[41], die sich von $p_1, \ldots, p_n$ unterscheidet, denn bei der Teilung von a durch eine dieser vorhandenen Zahlen bliebe stets ein Rest von Eins übrig. Demnach hat man einen Nachfolger p_{n+1} gefunden und erweitert so den bereits vorhandenen Vorrat an Primzahlen – ein Prozess, der sich endlos fortführen lässt. Das widerspricht allerdings der zuvor getroffenen Annahme, dass es nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ gibt. Der Satz von Euklid wurde somit bewiesen.

Während man seit der Zeit Euklids nun zeigen konnte, dass es unendlich viele Primzahlen „gibt", ist bis zum heutigen Tag noch nicht bekannt, ob die Anzahl der Primzahlzwillinge endlich oder unendlich ist. Indessen ist seit Jahren bekannt, dass die Summe der Kehrwerte aller Primzahlen mit einem Wert von ungefähr 2 endlich ist, wobei nach wie vor ungewiss ist, ob sich diese Summe aus endlich oder unendlich vielen Summanden zusammensetzt.

[41] Dies gilt wegen des bereits bewiesenen Satzes: „Der kleinste, von 1 verschiedene Teiler einer natürlichen Zahl a > 1 ist stets eine Primzahl p."

3 Erweiterungen des Zahlenbegriffs

3.1 Positive und negative Zahlen

Bei den sogenannten Erweiterungen des Zahlenbegriffs hat sich nach Russell ein grundlegender Fehler in der Auffassung dieser „neuen Zahlen“ eingeschlichen, den er in seinen Untersuchungen zu klären beabsichtigt:

> Einer der Irrtümer, der die Aufstellung von korrekten Definitionen hierfür [für die verschiedenen Erweiterungen des Zahlenbegriffs; Anm. EL] verhindert hat, ist die allgemeine Auffassung, daß jede Erweiterung einer Zahl die früheren Arten als spezielle Fälle umfaßt. Bei der Betrachtung der positiven und negativen ganzen Zahlen glaubte man, die positiven Zahlen mit den ursprünglichen, vorzeichenlosen ganzen Zahlen identifizieren zu können. Man glaubte auch, daß ein Bruch mit dem Nenner 1 mit der natürlichen Zahl, die ihren Zähler darstellt, identifiziert werden könne. Den Irrationalzahlen, z.B. der Quadratwurzel aus 2, glaubte man einen Platz zwischen den rationalen Brüchen anweisen zu können. Man hielt sie für größer als einige von ihnen und kleiner als andere. Rationale und irrationale Zahlen sollte man dann in eine Menge, die der reellen Zahlen, zusammenfassen können. Erweitert man den Zahlbegriff derart, daß er auch die komplexen umfaßt, d.h. Zahlen, zu denen die Quadratwurzel aus -1 gehört, so glaubte man, die reellen Zahlen als solche komplex betrachten zu können, deren imaginärer Teil (d.h. der Teil, der mit der Quadratwurzel aus -1 multipliziert ist) 0 ist. All diese Annahmen waren irrig. Man muß sie, wie wir sehen werden, ausschalten, wenn man korrekte Definitionen geben will.“[42]

Aus diesem Grund wählt Russell einen neuen Weg, indem er die positiven und negativen ganzen Zahlen als zueinander inverse Beziehungen bestimmt und zwar in der Art, dass $+1$ die Beziehung von $n+1$ zu n und -1 die Beziehung von n zu $n+1$ ist. Auf diese Weise gelangt er zu der hinreichenden Definition, dass für eine allgemeine induktive Zahl $+m$ die eindeutige Beziehung von $n+m$ zu n und $-m$ die Beziehung

[42] RUSSELL: Einführung, S 74.

von n zu $n+m$ ist und zwar für jede endliche oder unendliche Kardinalzahl n. Entscheidend dabei ist, dass $+m$ unter keinen Umständen mit m identifiziert werden darf, da es sich bei Letzterem um eine Menge von Mengen und nicht um eine eindeutige Beziehung handelt. De facto muss man in jeder Einzelheit zwischen $+m$ bzw. $-m$ und m differenzieren.

Eine andere Herangehensweise wählt Kaufmann bei den sogenannten Erweiterungen des Zahlenbegriffs, indem er von den zu der Addition, der Multiplikation und der Potenzierung inversen Operationen ausgeht. In einem ersten Schritt seiner Untersuchungen formuliert er die Definition der Subtraktion als die inverse Operation der Addition. Ihr Sinn zeigt sich in der Analyse des Zählprozesses, wobei zunächst vorausgesetzt wird, dass der Subtrahend nicht größer sein darf als der Minuend.[43] Fällt diese Bedingung jedoch weg, so bildet sich in der Erweiterung der Subtraktion über jene scheinbare Grenze der Differenz von null ein Gedankengang von vollkommen anderer Art heraus. Kaufmann spricht diesbezüglich von einer „Beziehung zweier gegenläufiger Sphären“ und versteht hierunter die Definition einer Resultante durch Subtraktion zweier gleichartiger Komponenten, deren Funktion als Minuend bzw. Subtrahend zunächst unbestimmt erscheint. Als einfaches Beispiel sei hierfür die Resultante bzw. der Ergebnisvektor zweier in entgegengesetzte Richtungen wirkende Kräfte angeführt, wobei man unter einem negativen Kraftvektor jenen versteht, der in einer der Ausgangsrichtung entgegengesetzten Richtung wirkt. Folglich ist gerade die Gegenläufigkeit bzw. die Durchführbarkeit der Resultantenbildung durch Subtraktion entscheidend dafür, dass die Symbolik der negativen Zahlen auf jede beliebige Beziehung von Komponenten angewendet werden kann[44]. Hieraus erschließen sich nach Kaufmann wesentliche technische Vereinfachungen, die nicht nur im Falle eines bestimmten Fixpunktes (dem Nullpunkt) als Ansatzpunkt für Additionen und Subtraktionen offenkundig werden, sondern insbesondere zur Klärung der paradox erscheinenden Produktbildungen mit negativen Zahlen als Multiplikatoren beitragen:

[43] Im Falle der Gleichheit von Subtrahend und Minuend wäre die Differenz der Subtraktion Null.
[44] Vgl, KAUFMANN: Einführung, S 108. Für Kaufmann erschließt sich von daher der Sinngehalt der negativen Zahlen in folgender Weise: „Ein Element heißt das –n-te in bezug auf einen vorgegebenen Zählprozeß, wenn von ihm aus gezählt ein Element, welches in jenem Zählprozeß das m-te ist, zum m+n-ten wird. Es liegt hier also eine Superposition von Zählprozessen vor, wobei im zweiten Zählprozeß die im ersten Zählprozeß festgelegten Zahlensymbole beibehalten werden, obwohl sich ihr Sinn verschoben hat.“

> Daß „plus mal minus" „minus", und „minus mal minus" „plus" ergibt, das bedeutet ja nichts anderes als die Verabsolutierung der Rechengesetze für die Subtraktion, wonach $(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd$ gilt. Die negative Zahl ist also der Subtrahend (Zahl und Operationszeichen) herausgelöst aus dem Gefüge der Subtraktion.[45]

Demzufolge lässt sich kein übereinstimmendes logisches Charakteristikum der negativen Zahlen anführen auf Grund dessen eine Scheidung von den natürlichen Zahlen vollzogen werden könnte.

3.2 Rationale Zahlen

Bei der Bildung der Brüche wählt Kaufmann den Weg über die Division als die zur Multiplikation inverse Operation. Dabei betont er, dass es sich bei den als Brüche benannten Symbolen nicht um eine Erweiterung des Zahlenbegriffs, sondern um Beziehungen zwischen natürlichen Zahlen handelt, da man für zwei Bruchzahlen p/q und r/s per Definition festlegt, dass zum einen die Fälle $p/q=r/s \Leftrightarrow ps=qr$, $p/q>r/s \Leftrightarrow ps>qr$ bzw. $p/q<r/s \Leftrightarrow ps<qr$ und zum anderen sowohl die beiden Grundoperationen Addition und Multiplikation als auch das kommutative, das assoziative und das distributive Gesetz für Brüche gelten. Sämtliche mit Brüchen durchführbare mathematische Verknüpfungen sind von daher in Wahrheit Operationen mit natürlichen Zahlen, weshalb durch die Einführung der Brüche kein neues logisches Moment eingeführt wird, da sie lediglich eine Vorschrift für den Gebrauch bestimmter Symbole (nämlich die der natürlichen Zahlen) bedeuten. Die unreflektierte Überzeugung, dass zwischen den selbstständigen Symbolen der natürlichen Zahlen und jenen der gebrochenen Zahlen nachträglich Beziehungen gezogen wurden, muss revidiert werden, da es sich bei einer Bruchzahl um nichts anderes als ein „unvollständiges" Symbol für bestimmte Operationen mit natürlichen Zahlen handelt. Den gleichen Ansatzpunkt wie Kaufmann wählt Russell, wenn er in seiner *Einführung in die mathematische Philosophie* einen Bruch m/n als „die Beziehung zwischen zwei induktiven Zahlen x und y, wenn $xn=ym$"[46] definiert unter der Bedingung, dass sowohl m

[45] KAUFMANN: Einführung, S 108.
[46] RUSSELL: Einführung, S 75.

als auch n ungleich null sind. Desgleichen betont er, dass es sich sowohl bei dem Bruch $m/1$ (als Relation zwischen zwei ganzen Zahlen) wie auch bei $+m$ um eine solche Beziehung handelt und sie unter keinen Umständen mit der induktiven Zahl m identifiziert werden dürfen, da eine Beziehung und eine Menge von Mengen Objekte von völlig unterschiedlicher Natur sind.

In diesem Zusammenhang drängt sich die Frage auf, weshalb die Brüche neben den natürlichen Zahlen nicht nur allgemein als selbstständige Rationalzahlen interpretiert werden, sondern vielmehr die natürlichen Zahlen als einen Spezialfall der Rationalzahlen (nämlich als Brüche mit Nenner 1) begriffen werden. Die Schuld dafür liegt nach Kaufmann in der Fehlinterpretation der geometrischen Sachverhalte der Messung[47], wonach man die Brüche anschaulich vor sich zu haben meint. Die vermeintlich bildhafte Gegebenheit der Brüche bei der Messung aber basiert auf einer Fehlinterpretation der Vorbedingung, nämlich dass es im Raum kein Kleinstes und kein Größtes gibt, weswegen die Maßeinheit bzw. die Einheitsstrecke e beliebig festgesetzt werden kann. Durch den Einsatz der Symbolik der Rationalzahlen auf die Messung einer Teilstrecke e_1, die sich z.B. sechsmal auf e auftragen lässt, kann ihr der Bruch $1/6$ zugeordnet werden, gleichwohl ist hier allenfalls die Strecke und nicht der ihr zugeordnete Bruch anschaulich vorhanden. Durch die im Raum gegebene Ordnungsstruktur und die in der räumlichen Überdeckung enthaltenen Gleichheitsstruktur kann zwar eine messende Geometrie betrieben werden, aber eine logische Rechtfertigung einer Erweiterung des Zahlenbegriffes ist laut Kaufmann damit nicht möglich.

> Exkurs: Nichtsdestoweniger spielt die geometrische Anschauung in Bezug auf die Problematik des Unendlichen in der Mathematik eine bedeutsame Rolle, da sie in der Geometrie als eine „letzte" Erkenntnisquelle betrachtet und zugleich dem exakten Denken gegenübergestellt wird.[48] Noch mehr Gefahren als die Trennung von Anschauung und Denken birgt aber die unzutreffende Behauptung, dass gewisse Zahlenaussagen, die mit dem „Unendlichgroßen" und dem „Unendlichkleinen" agieren, anschaulich realisierbar sind und für diese eine vermeintliche Veranschaulichung als Legitimierung interpretiert wird. Die These aber, dass es sich bei geometrischen Be-

[47] Vgl. KAUFMANN: Unendliche, S 110f. Unter „Messung" versteht Kaufmann „die Festlegung von Überdeckungsbeziehungen räumlicher Gebilde mit Hilfe von Zählprozessen."
[48] Hier müssen zunächst die Relation von Anschauung und Denken und die vermeintliche Anschaulichkeit der Geometrie getrennt analysiert werden, wobei die Gegenüberstellung von Anschauung und Denken nicht als Gegensatz, sondern als eine Unterscheidung innerhalb des Denkens – in ein anschauliches oder in ein formales Denken – verstanden bzw. vollzogen werden darf.

griffen um Begriffe von anschaulichen Gegenständen handelt, ist unkorrekt. Vielmehr handelt es sich bei jenen um Abstraktionen, mehr noch um Idealisierungen anschaulicher Daten. Die Fehlinterpretation der beiden Begriffe „Unendlichklein“ für „beliebig klein“ und „Unendlichgroß“ für „beliebig groß“ innerhalb der Geometrie führt somit zur Illusion, dass das Transfinite in den Gegenständen der Geometrie tatsächlich anschaulich gegeben sei. Gleichwohl wird mit dem Begriff der „beliebigen Kleinheit“ vielmehr der Ausschluss der Behauptung einer festen unteren Schranke der Ausdehnung zum Ausdruck gebracht, da z.B. ein zweidimensionales Gebilde nicht anders begriffen werden kann als ein dreidimensionaler Körper, der nach einer Dimension hin einer fortschreitenden Minimierung unterworfen gedacht wird. Daher kann man der These von der Zusammensetzbarkeit der Kurven aus Punkten, der Flächen aus Kurven und der Körper aus Flächen nur in dem Fall einen anschaulichen Sinn abringen, wenn der Punkt als ein beliebig kleines Kurvenstück angesehen wird, denn „die Auffassung, daß unendlich viele niedererdimensionale Gebilde zu einem höherdimensionalen Gebilde anschaulich zusammengefasst werden, ist ein Ungedanke.“[49] Analog hierzu lässt sich das „Unendlichgroße“ in der Geometrie als Ausschluss einer oberen Schranke der Ausdehnung auffassen. Mit dem Aufzeigen des Fehlens einer unteren bzw. einer oberen Ausdehnungsschranke ist bereits ein wichtiger unanschaulicher Moment innerhalb der geometrischen Erkenntnis erfasst worden, da alle Bemühungen transfinite Axiome der Arithmetik und der Mengenlehre anschaulich zu verifizieren mit den Begriffen des Unendlichgroßen und des Unendlichkleinen operieren. Auf diese Weise wird ersichtlich, dass bereits jene unanschaulichen Aspekte in die fundamentalen Begriffe der Geometrie Eingang finden, die in der Arithmetik an die Fehldeutung des Transfiniten anknüpfen, wodurch die Illusion entsteht, als existiere das Transfinite anschaulich in den Raumgebilden, den Objekten der Geometrie. Kaufmann zufolge unterlagen selbst erstrangige Mathematiker und Philosophen dieser Faszination der vermeintlich anschaulichen Faktizität des Transfiniten, und es ist ihm zufolge kaum anzunehmen, dass ohne diese Voreingenommenheit die Thesen Cantors vom aktual Unendlichen verschiedener „Mächtigkeiten“ sich hätten behaupten können.

Der in diesem Zusammenhang für die Mathematik wichtigste Begriff, welcher mit der Symbolik der gebrochenen Zahlen verflochten ist, ist jener des „Grenzwertes[50] einer

[49] KAUFMANN: Unendliche, S 114.
[50] Vgl. KAUFMANN: Unendliche, S 117. „Man nennt *r/s* den Grenzwert der Folge p_1/q_1, p_2/q_2 … p_n/q_n …, wenn zu einem beliebig kleinen positiven Bruch 1 eine Zahl n so gefunden werden kann, daß für das n-te Glied der Folge und für jedes beliebige spätere Glied die Ungleichung gilt: $|r/s - p_n/q_n| < 1$.

Folge rationaler Zahlen“ bei dem es – auf Grund der Definition eines Bruches – in Wahrheit um eine Feststellung von Relationen zwischen natürlichen Zahlen geht.

Bevor wir näher auf den Begriff des Grenzwertes eingehen, müssen wir zunächst die „gesamte“ Folge der rationalen Zahlen genauer untersuchen. Die Definition von „größer und kleiner zwischen Brüchen“ stellt erwartungsgemäß keine Schwierigkeiten dar, zumal es einsichtig ist, dass bei zwei gegebenen Brüchen m/n und p/q dann m/n kleiner als p/q gilt, wenn $m.q$ kleiner als $p.n$ ist. Die auf diese Weise definierte Relation „kleiner als“ stellt eine Folgenbeziehung da, sodass die Brüche eine der Größe nach geordnete Folge bilden, wobei null das kleinste und Unendlich das größte Folgenglied bildet. Lässt man hingegen die beiden Randelemente weg, dann existiert kein kleinster und kein größter Bruch mehr, denn wählt man eine von null und Unendlich verschiedene willkürliche Bruchzahl m/n, so ist offenbar $m/2n$ kleiner und $2m/n$ größer als der ursprüngliche Bruch, obwohl keiner von beiden identisch mit den Randgliedern ist. Folglich ist m/n weder die kleinste noch die größte Bruchzahl in der Folge der rationalen Zahlen. In gleichem Maße einsichtig ist, dass es zwischen zwei nächstgelegenen Brüchen – so nah sie auch benachbart sein mögen – stets weitere Bruchzahlen zu finden sind. Gesetzt den Fall m/n und p/q sind zwei Brüche mit p/q größer m/n, dann kann bewiesen werden, dass die Bruchzahl $(m+p)/(n+q)$ zwischen den beiden gegebenen liegt. Dieses Verfahren kann ad infinitum fortgesetzt werden, weshalb man zu dem Schluss kommt, dass zwischen zwei beliebig benachbarten Bruchzahlen unendlich viele weitere Brüche liegen. In der Reihe der rationalen Zahlen existieren folglich keine zwei aufeinanderfolgenden Elemente, weshalb die Brüche der Größe nach geordnet eine dichte Folge bilden.

Der Begriff des Grenzwertes wird innerhalb der Analysis für gewöhnlich in Verbindung mit demjenigen der beschränkten Folge analysiert. Eine solche Folge wird von Kaufmann in der Weise definiert, dass sämtliche – als größer null vorausgesetzte – Glieder unterhalb einer festgelegten Zahl liegen. Eben deswegen ist nach Auflösung der Symbolik der Rationalzahlen der sich daraus ergebende Sinn der Definition nicht

---

Wenn wir jetzt den Sinn dieses Begriffes unter Ausschaltung der Symbolik der Brüche im Definiens bestimmen, so ergibt sich folgende Definition: Gegeben seien zwei Folgen natürlicher Zahlen: p_1, p_2, … p_n, … und q_1, q_2, … q_n, …. Dann heißt *r/s* der Grenzwert von p_1/q_1, p_2/q_2, … p_n/q_n, … wenn zu jeder natürlichen Zahl k eine natürliche Zahl z so gefunden werden kann, daß für jede natürliche Zahl $n \geqq z$ die Beziehung $q_n r > k|q_n r - p_n s|$ gilt.“

darin begründet, dass alle Glieder einer Folge natürlicher Zahlen unterhalb einer vorgeschriebenen natürlichen Zahl liegen, sondern vielmehr dadurch, dass „für jedes Element der Folge eine mit dem Ordnungsindex des Elementes innerhalb der Folge variierende obere Schranke festgelegt erscheint“[51]. Keinesfalls darf jedoch ein Grenzwert von Folgen rationaler Zahlen zunächst separat betrachtet und erst in einem zweiten Schritt durch Relationen zwischen natürlichen Zahlen ersetzt werden, da die mit rationalen Zahlen durchgeführten Operationen in Wirklichkeit genau denjenigen mit natürlichen Zahlen gleichkommen. Das Rechnen mit Bruchzahlen entspricht nämlich, wie bereits dargelegt wurde, dem Operieren mit den Zählern und Nennern der Brüche. Allein durch die Einführung der Symbole der Bruchzahlen als neue selbstständige Objekte bildet sich die Fehlinterpretation der Unabhängigkeit der Brüche von den natürlichen Zahlen als Objekte des mathematischen Forschens heraus. Scheinprobleme sind die Folge, deren ganze Tragweite erst bei der Einführung der Irrationalzahlen als nächste Stufe der „Erweiterung des Zahlenbegriffs“ zum Vorschein kommt.

3.3 Reelle Zahlen

Bei der Erweiterung des Zahlenbegriffs zu den sogenannten reellen Zahlen wählt Kaufmann den Weg über die beiden zum Potenzieren inversen Operationen des Radizierens und des Logarithmierens. Möchte man aber zum ursprünglichen Pfad der Untersuchungen zurückkehren, so muss man dem Weg der alten Griechen folgen, die als erste über die Geometrie auf Zahlen stießen, die nicht als Bruch, d.h. als Relation zweier natürlicher Zahlen, angegeben werden konnten. Ihre herausragenden Leistungen im Bereich der Geometrie verdankten sie nicht zuletzt ihrem Bestehen auf Beweise und der Forderung, dass einzig jenes zum Bestand mathematischen Wissens gezählt werden darf, das sich logisch aus den bereits anerkannten Fakten erschließen lässt.

Die Erweiterung des Zahlenbegriffs basiert auf der Überlegung, dass ein Quadrat mit Seitenlänge von 1 cm eine Diagonale haben muss, deren Länge in cm die Quadratwurzel aus 2 beträgt. Dass die Zahl 2 allerdings kein Quadrat eines Bruches m/n

[51] Vgl. KAUFMANN: Unendliche, S 117. Innerhalb der Analysis gilt die Beschränktheit einer monotonen Folge nicht nur als notwendige, sondern auch als hinreichende Bedingung für die Existenz eines Grenzwertes.

ist, kann in einfachen Schritten bewiesen werden. Die Annahme, dass die natürlichen Zahlen m und n nicht beide gerade sind vereinfacht den Beweis, da man andernfalls so oft durch 2 kürzen könnte, bis – nach endlich vielen Schritten – eine der beiden Zahlen ungerade ist. Gesetzt dem Fall der – bereits gekürzte – Bruch m/n sei die Quadratwurzel aus 2, sodass $m^2/n^2 = 2$ bzw. $m^2 = 2n^2$ gilt. Dann muss m^2 als Doppeltes von n^2 gerade sein. Da das Quadrat einer ungeraden Zahl ungerade ist, muss auch m gerade und demzufolge m^2 durch 4 teilbar sein. Basierend auf der anfangs getroffenen Annahme, dass m und n nicht beide zugleich gerade sein dürfen, muss n ungerade sein. Folglich kann $2n^2 = m^2$ nicht durch 4 geteilt werden, was zu einem Widerspruch führt. Da es also keine Bruchzahl m/n gibt, deren Quadrat 2 beträgt, so existiert auch kein Bruch, der die Länge der Diagonale eines Quadrates mit Seitenlänge von 1 cm exakt wiedergibt.

Immerhin gibt Kaufmann ein – namentlich als Quadratwurzelziehung bekanntes – Verfahren an, wodurch eine Folge von Brüchen ermittelt werden kann, deren Quadrate sich mit jedem weiteren Glied unablässig dem Wert 2 nähern. Hierbei müssen jedoch zwei Forderungen auseinandergehalten werden. Zum einen kann eine aufsteigende Folge von Rationalzahlen gefunden werden, deren Quadrate zwar stets kleiner als 2 bleiben, aber beliebig nahe an 2 heranrücken. Setzt man also eine beliebig kleine „Betragsgrenze“ im Vorhinein fest, so werden von einem bestimmten Glied der Folge alle weiteren Elemente Quadrate haben, die sich von 2 um weniger als diesen Betrag unterscheiden. Zum andern kann man ebenso gut eine zweite, absteigende Folge rationaler Zahlen bilden, deren Quadrate alle größer als der Zahlenwert 2 sind und die sich ihm „von oben her“ unbeschränkt nähern. Es ist nur schwer vorstellbar, dass man durch dieses Verfahren den exakten Wert der Quadratwurzel aus 2 wirklich nicht berechnen kann, obgleich eine unbegrenzte Näherung an den gesuchten Zahlenwert durch eine immer engere Umzingelung möglich ist. Teilt man hingegen die Brüche der beiden Folgen entsprechend ihrer Größe in zwei Klassen, so wird ersichtlich, dass jene, deren Quadrate kleiner als 2 sind, kein Maximum und jene, deren Quadrate größer als 2 sind, kein Minimum besitzen. Die Differenz zwischen den Zahlen der beiden Klassen besitzt dabei keine untere Grenze außer der Null. Doch ungeachtet wie eng auch das Verfahren die gesuchte Zahl durch die beiden Klassen einschnürt, dort wo die Quadratwurzel aus 2 vermutet wurde, ist nichts. In Anbetracht der gewonnenen Einsichten kommt Kaufmann zu folgendem Schluss:

> […] es ist eine unzulässige Interpretation dieses Sachverhaltes, zu behaupten, es gäbe „zwischen“ jenen beiden Folgen noch etwas, was von ihnen in beliebig engen Grenzen eingeschlossen werde, und dieses etwas könne man als Irrationalzahl definieren. Der Umstand, daß in der ersten der beiden angegebenen Folgen keine größte Rationalzahl und in der zweiten Folge keine kleinste Rationalzahl aufgewiesen werden kann, darf nicht in die Behauptung umgedeutet werden, daß es eine Grenze (die Irrationalzahl) gebe, der sich jene beiden Folgen unbegrenzt nähern, ohne sie doch je erreichen zu können. Ebenso unrichtig ist es, die Folge von Rationalzahlen[52], deren Partialsummenquadrate bzw. Partialdifferenzenquadrate sich der Zahl 2 unbegrenzt nähern (gegen 2 konvergieren), als selbstständige Einheit aufzufassen und als Irrationalzahl zu definieren; denn die Bildung unendlichgliedriger Totalitäten ist unvollziehbar.[53]

Bei der Behauptung, dass die im obigen Verfahren errechneten rationalen Zahlen sich unbegrenzt der Quadratwurzel von 2 nähern, handelt es sich – so Kaufmann – um eine ungenaue und fehlerhafte Ausdrucksweise, da eine solche Rationalzahl – vor allem zu diesem Zeitpunkt der Untersuchung – nicht existiert und so wäre an dieser Stelle bestenfalls die Formulierung, dass die Quadrate jener Bruchzahlen sich der Zahl 2 uneingeschränkt nähern, korrekt. Darüber hinaus wird anhand dieses Beispiels ersichtlich, dass nicht jede beschränkte Folge von rationalen Zahlen einen Grenzwert besitzen muss, wenngleich auch hier – wie im Fall von konvergenten Folgen – die Werte immer enger zusammenrücken.[54]

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die reellen Zahlen einzuführen. Eines der Verfahren, das bereits im obigen Beispiel der „Berechnung“ der Quadratwurzel von 2

---

[52] Diese Rationalzahlen sind in unserem Falle: 1. 0.4, 0.01, 0.004, 0.0002 bzw. 2. 0.5, 0.08, 0.005, 0.0007.

[53] KAUFMANN: Unendliche, S 121f.

[54] Kaufmanns Definition des Grenzwertes einer beschränkten Folge und weiterführende Erläuterungen, die für die spätere Begriffsbildung der Irrationalzahl von Bedeutung sind, findet man in „Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung“ auf Seite 123ff.

angewandt wurde, verwendet die Methode des Dedekindschen Schnittes. Hierbei werden die – in einer Folge – angeordneten Elemente der Menge der rationalen Zahlen in zwei Klassen bzw. in zwei nichtleere Teilmengen A und B unterteilt. Der Dedekindsche Schnitt (A,B)[55] definiert hier eine Zerlegung der rationalen Menge $\mathbb{Q}$[56] in zwei disjunkte Klassen und zwar in eine Unterklasse A und in eine Oberklasse B. In Anbetracht dessen, was am Schnittpunkt selbst passiert, können vier Möglichkeiten unterschieden werden: (1) Die Unterklasse besitzt ein Maximum und die Oberklasse ein Minimum. Dieser Fall kann außer Acht gelassen werden. (2) Es gibt ein Maximum bei der einen Klasse und kein Minimum bei der anderen. In diesem zweiten Fall nennt man das Maximum der Unterklasse den unteren Limes der Oberklasse. (3) Es gibt kein Maximum bei der einen, aber ein Minimum bei der anderen Klasse. Hier bezeichnet man das Minimum der Oberklasse den oberen Limes der Unterklasse. (4) Es gibt weder ein Maximum bei der einen Klasse noch ein Minimum bei der anderen. In diesem letzten und interessantesten Fall sagt man, dass eine „Lücke“ existiert, denn:

> Weder die Oberklasse noch die Unterklasse hat einen Limes oder ein letztes Element. Diesen Fall können wir auch einen irrationalen Schnitt nennen. Denn die Klassen der Folge der Brüche weisen Lücken auf, wenn sie irrationalen Zahlen entsprechen.“[57]

Ein Grund, weshalb eine korrekte Formulierung der Theorie der Irrationalzahlen auf sich warten ließ, lag in der irrigen Überzeugung, dass es in der Folge der Bruchzahlen „Limites“ zwingend geben muss.[58]

Analysiert man die vier Möglichkeiten des Dedekindschen Schnittes so erkennt man, dass, während in den ersten drei Fällen jede Klasse je nachdem eine obere oder untere Schranke aufweist, bei der vierten Art keine Grenze existiert. Unter der Voraussetzung, dass die Unterklasse eine obere Schranke besitzt, ist es völlig nachvollzieh-

---

[55] Das Paar (A,B) heißt Dedekindscher Schnitt, wenn: (1) $A \cup B = \mathbb{Q}$ und $A \cap B = \emptyset$ und (2) Für jedes x, y $\in \mathbb{Q}$ gilt: Wenn $x \in A$ und $y \in B$, so $x < y$.

[56] Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}$ und $q \neq 0\}$

[57] RUSSELL: Einführung, S 81.

[58] Vgl. RUSSEL: Einführung, S 82f. In Anbetracht dieses Irrtums ist für Russell die Definition des Begriffs des Limes von allergrößter Relevanz.

bar, dass die Oberklasse eine untere Schranke aufweist, wobei im zweiten und dritten Fall die beiden Grenzen identisch sind.

Bei der (oben vorgenommenen) Zweiteilung der nach der Größe geordneten Folge der Bruchzahlen konnte man erkennen, dass jene Klasse, deren Quadrate kleiner als 2 waren, kein Maximum, und jene, deren Quadrate größer als 2 waren, kein Minimum besaßen. Dort, wo jedoch die Quadratwurzel aus 2 vermutet wurde, war eine „Lücke“. Da aber eine Folge dann und nur dann „Dedekindsch“ genannt wird, wenn jede ihrer Klassen eine obere bzw. eine untere Grenze besitzt, so trifft diese Eigenschaft nicht auf die betreffende Folge zu. Aus diesem Grund musste man einen neuen Ansatz für die Lösung des Problems suchen und ließ sich hierbei durch die räumliche Vorstellung insofern beeinflussen, als man zu der Auffassung kam, dass Folgen dann Limites haben müssen, wo es befremdend erscheinen würden, wenn keine existierten. Zwar sah man ein, dass die Bruchzahlen, deren Quadrate kleiner als 2 sind, keinen rationalen Limes besitzen, doch man wollte die Dedekindsche Lücke ausfüllen und erlaubte sich auf Grund dessen der Einfachheit halber einen irrationalen Limes zu „postulieren“. Diese Methode der Problemlösung hat gewiss viele Vorteile und es war Dedekind, der das Axiom aufstellte, dass solche Lücken immer ausgefüllt werden müssen, damit jede Klasse stets eine Grenze besitzt.[59] Die Definition der Irrationalzahlen erfolgt bei ihm nun dadurch, dass sie einen Schnitt erzeugen, der eine Lücke ist. Doch ohne einen passenden Ansatzpunkt erscheint Kaufmann ein irrationaler Schnitt zunächst als „Nonsens“, obgleich er die für ihn unannehmbar bleibende Dedekindsche Definition zumindest mit dem Hinweis zu retten versucht, dass Dedekind durch Funktionen definierte Schnitte im Auge hatte. In Auseinandersetzung mit dessen Theorien betont Kaufmann weiters:

> Ebenso unzulässig wie die Definition der Irrationalzahl durch einen Schnitt im Gebiet der rationalen Zahlen ist diejenige der Gleichsetzung der beschränkten Folge mit der Irrationalzahl.[60] Denn diese Folge kann nicht als Totalität vorliegen, sondern nur durch ein Bildungsgesetz bestimmt sein. Mit diesem Bildungsgesetz aber rechnet man keineswegs, wenn man mit Irrationalzahlen rechnet. Vielmehr rechnet man mit ‚ratio-

[59] Aus diesem Grund werden Folgen, für die dieses Axiom gilt, auch „Dedekindsche Folgen“ genannt. Gleichwohl gibt es unendlich viele Folgen, für die dieses Theorem nicht gilt.
[60] Dies entspricht der Cantorschen Definition der Irrationalzahl durch eine Fundamentalreihe.

> nalen Approximationen‘, wobei man sich bewußt ist, daß man die Approximation abschätzen und beliebig verschärfen kann. Die Definition eines Begriffes ist aber […] nur dann korrekt, wenn sie den Sinn wiedergibt, der diesem Begriff im Gebrauch zu kommt.“[61]

Für Russell stellt die Behauptung Dedekinds, dass ein irrationaler Dedekindscher Schnitt in gewisser Beziehung eine Irrationalzahl „darstellt“, zunächst lediglich eine vage Vermutung dar, die folgender exakten Definition bedarf: „Eine Irrationalzahl ist nicht der Limes einer Folge von Brüchen.“[62] Basierend auf seiner Vorstellung, dass Bruchzahlen mit dem Nenner Eins nicht identisch mit den ganzen Zahlen sind, kann man hierzu analog zu dem Schluss kommen, dass rationale Zahlen, die kleiner oder größer als Irrationalzahlen sein können oder Irrationalzahlen als Limites vorweisen, nicht mit den Brüchen zu identifizieren sind. Aus diesem Grund muss Russell zufolge eine neue Art von Zahlen, die der sogenannten „reellen Zahlen“ definiert werden. Die reellen Zahlen können unterdessen in zwei Gruppen, die der rationalen und die der irrationalen Zahlen unterteilt werden, wobei die ersteren den Brüchen in derselben Weise „entsprechen“, wie die Brüche mit Nenner 1 den ganzen Zahlen. Entscheidend ist hier die Tatsache, dass sie nicht mit den Brüchen identisch sind. Laut Russell ist eine Irrationalzahl durch einen irrationalen Schnitt dargestellt und jeder (Dedekindsche) Schnitt lässt sich durch seine Unterklasse festlegen. Einen solchen Schnitt, dessen Unterklasse kein Maximum aufweist, nennt Russel „Segment“.

> Dann sind die Segmente, die den Brüchen entsprechen, diejenigen, die aus allen Brüchen bestehen, die kleiner sind als der entsprechende Bruch. Dieser ist ihre Grenze. Dagegen besitzen die Segmente, die Irrationalzahlen entsprechen, keine Grenze.“[63]

Hieraus erschließt sich ihm folgende Definition: „Eine »Irrationalzahl« ist ein Segment in der Folge der Brüche, das keine Grenze besitzt.“[64] Im Fall der Quadratwurzel aus 2 ist demnach der obere Limes all derjenigen Segmente der Folge der Brüche, die

[61] KAUFMANN: Unendliche, S 126f.
[62] RUSSELL: Einführung, S 84.
[63] RUSSELL: Einführung, S 84.
[64] RUSSELL: Einführung, S 85.

den Bruchzahlen entsprechen, deren Quadrat kleiner als 2 ist bzw. die Quadratwurzel aus 2 ist das Segment, welches alle Brüchen einschließt, deren Quadrat kleiner ist als 2. Im Gegensatz zu Dedekinds „Postulat“ handelt es sich bei Russells Theorie der reellen Zahlen um eine Konstruktion, deren Vorzug darin beruht, dass sie es frei von der Notwendigkeit neuer Thesen gestattet, deduktiv den Ausgang von den ursprünglichen logischen Fakten zu nehmen.

Aber auch Russells Ansatz ist – ähnlich wie jener Dedekinds – für Kaufmann nicht aufrechtzuerhalten, da für ihn der Begriff der „Irrationalzahl“ lediglich für den abgekürzten Ausdruck steht, dass „zu beschränkten Folgen ohne Grenzwert beliebig kleine Häufungsintervalle gehören“[65]. Zudem leitet er hieraus ab, dass zwei beschränkte monotone Folgen ohne Grenzwert dann ein und dieselbe Irrationalzahl festlegen, wenn jedes Häufungsintervall der einen mit jedem Häufungsintervall der anderen Folge partiell zusammenfällt, oder anders gesagt, wenn sie mindestens eine rationale Zahl mit ihm gemeinsam hat.[66]

Würde man die erworbene Einsicht in die Formulierungen der mathematischen Sätze aufnehmen, so müssten wichtige Sätze der Analysis und Algebra komplizierter abgefasst werden, ohne dass sich hierdurch eine sachliche Änderung vollziehen würde, da man lediglich den Gegenständen ihren „richtigen“ Namen zukommen lassen würde. Auf die Frage nach dem Nutzen einer solchen Untersuchung, deren Resultat bloß eine bestens bewährte und simple Terminologie komplizieren würde, antwortet Kaufmann:

> Die Nichtberücksichtigung sachlicher Unterscheidungen in Terminologie und Symbolik ist nur dann zulässig, wenn die Gefahr ausgeschaltet erscheint, daß hierdurch eine gedankliche Verwischung jener Unterschiede bewirkt wird.[67]

Bei der Verwendung von sprachlichen und semiotischen Verkürzungen muss man daher besonders differenziert Rechenschaft über die Bedeutung der jeweiligen Worte

[65] KAUFMANN: Unendliche, S 127.
[66] Die Gültigkeit der bestehenden Rechenregeln für die irrationalen Zahlen ergibt sich damit ohne weitere Schwierigkeiten.
[67] KAUFMANN: Unendliche, S 128.

und Zeichen geben, um die Entstehung von logisch-philosophischen Scheinproblemen zu verhindern. Diese Gefahr trat insbesondere bei dem Begriff der Irrationalzahl bzw. bei jenem der reellen Zahlen auf und führte zu einer Mauer, die den Einblick in

> [...] den wahren Charakter der als transfinit angesehenen Beziehungen verwehrte, da man die Irrationalzahl nicht anders als durch eine unendliche Menge glaubte darstellen zu können und daher den Begriff der unendlichen Menge als unentbehrlich für die Analysis ansehen musste.[68]

Kaufmann führt die Erschütterungen der Fundamente der Analysis auf diese „fehlerhafte“ Entwicklung zurück, da man sich innerhalb ihrer Grenzen als unfähig sah, dem unabzählbar Unendlichen zu entrinnen. Tatsächlich handelt es sich ihm zufolge um nichts anderes als eine Fehlinterpretation, da – seiner Meinung nach – diese Form des Unendlichen in der Analysis nichts zu suchen hat. Es ist allgemein nachvollziehbar, dass durch eine Umformulierung der Sätze der Analysis keinerlei Zugewinn an deren Erkenntnisbeständen etwas zu verändern vermag, da die Erkenntnis gerade in der korrekten Darlegung der mathematischen Bedeutung der verwendeten Symbolik lag. Solange man diese Tatsachen im Bewusstsein wach hält, spricht nichts gegen die Verwendung der Symbolik der Irrationalzahlen, die den Ansprüchen der mathematischen Techniken vornehmlich gerecht werden ohne dabei den Gefahren transfiniter Fehlinterpretationen zu unterliegen.

> Exkurs: Der Vollständigkeit halber sei noch kurz auf die komplexen Zahlen verwiesen, die Quadratwurzeln negativer Zahlen umfassen. Sie „entstanden“ zunächst aus der Notwendigkeit zwei einfache Probleme zu lösen, denn sowohl das Wurzelziehen als auch die „vollständige und lückenlose“ Lösung von Gleichungen sollten immer möglich sein. So möchte man z.B. behaupten können, dass jede quadratische Gleichung zwei, jede kubische Gleichung drei Wurzeln hat usw. Beschränkt man sich allerdings auf die reellen Zahlen, dann hat eine Gleichung der Form $x^2+1=0$ keine und eine andere wie $x^3-1=0$ bloß eine Wurzel. Da das Quadrat negativer Zahlen positiv ist, so musste es sich bei einer Zahl, deren Quadrat negativ ist, um eine neue Art von Zahl handeln. Man definierte hierfür die Quadratwurzel aus −1 mit i, wodurch jede Zahl, bei

[68] KAUFMANN: Unendliche, S 128f.

der eine negative Quadratwurzel auftrat, in der Form x+yi[69] dargestellt werden konnten.

Nach dieser Übersicht über die Erweiterungen des Zahlenbegriffs kommen wir nun im nächsten Kapitel zur Anwendung der Zahlen auf unendliche Mengen. In diesem Zusammenhang ist Georg Cantor als „Schöpfer“ der Mengenlehre eine zentrale Figur in der Auseinandersetzung mit dieser Problematik. Seine Forschungen führten ihn zu der Entwicklung der Kontinuumhypothese, die besagt, dass die Kardinalität der Menge der reellen Zahlen, c, gleich „Aleph-eins“ ist, der nächst höheren Unendlichkeit nach „Aleph-Null“.

[69] Die imaginären Zahlen x+yi kann in einen „reellen“ und einen „imaginären“ Teil untergliedert werden, wobei durch die beiden Bezeichnungen lediglich der Gegensatz zwischen den beiden betont werden soll, da sowohl x als auch y reelle Zahlen sind. Auf diese Weise werden die komplexen Zahlen als geordnete Paare von reellen Zahlen definiert.

II DIE MENGENLEHRE CANTORS – FREIHEIT UND ABGRUND DER MATHEMATIK

Das zweite große Kapitel hat den deutschen Mathematiker Georg Cantor und seiner „Schöpfung“ der Mengenlehre als eine mathematische Disziplin zum Inhalt. Hierbei werden seine Vorstellungen in Bezug auf Wahrheit, Transfinites, Ontologie und Religion ebenso behandelt wie seine Kontinuumhypothese, die man als „Lebenswerk“ Cantors bezeichnen mag. In diesem Zusammenhang stößt man auf die Herausforderung der Selbstbezüglichkeit, das Teil eines noch umfassenderen Problems der Widerspruchfreiheit der Mathematik ist.

1 Georg Cantor

„In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi.“[70]

In der dritten These seiner Doktorarbeit zeigt sich, dass für Georg Cantor[71] insbesondere die richtige Problemstellung von Bedeutung war, zumal seine späteren Leistungen de facto nicht immer in der Auflösung der von ihm selbst aufgestellten und eigenwilligen Fragestellungen zurückzuführen sind, sondern die Erschließung neuer Fachgebiete der Mathematik zum Ziel hatten. Demzufolge ist es nicht befremdend, dass diese „neuen und bislang noch nicht da gewesenen“ Probleme zum Teil von Cantor selbst und zum anderen erst durch Wissenschaftler der nächsten Generation aufgelöst werden konnten. Und so ist es leicht nachvollziehbar, dass Ernst Zermelo im Vorwort der „Gesammelten Abhandlungen“ von Georg Cantor zu folgendem Resümee kam:

---

[70] Übersetzung: In der Mathematik ist die Kunst des Fragestellens wichtiger als die des Lösens.

[71] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor wurde am 3. März 1845 in St. Petersburg geboren. Mit Ausnahme von je einem Semester in Zürich und Göttingen studierte er in Berlin, wo damals Kummer, Weierstraß und Kronecker viel mathematisches Talent anzogen, die Fächer Mathematik, Physik und Philosophie. Nach seiner Habilitation ließ er sich in Halle nieder, wo er Zeit seines Lebens gewirkt hatte. Die Periode seiner bedeutendsten Schöpfungen und Entdeckungen liegt zwischen 1872 und dem Endes des 19. Jahrhunderts. Sein – aus heutiger Sicht – durchaus berechtigter Wunsch, an eine der wenigen damals bedeutenden Forschungsstätten wie Berling oder Göttingen berufen zu werden, blieb unerfüllt. Seine späteren Jahre waren zunehmend von immer wiederkehrenden Depressionen geprägt, welche ohne Frage von der mangelnden Anerkennung bis zur äußersten Zurückweisung seines Werkes durch renommierte Zeitgenossen negativ beeinflusst wurden. Georg Cantor verstarb am 6. Jänner 1918 in Halle.

> In der Geschichte der Wissenschaften ist es gewiß ein seltener Fall, wenn eine ganze wissenschaftliche Disziplin von grundlegender Bedeutung der schöpferischen Tat eines einzelnen zu verdanken ist. Dieser Fall ist verwirklicht in der Schöpfung G e o r g C a n t o r s, der Mengenlehre, einer neuen mathematischen Disziplin, die […] in einer Reihe von Abhandlungen ein und desselben Forschers in ihren Grundzügen entwickelt, seitdem zum bleibenden Besitze der Wissenschaft geworden ist, […][72]

2 Die Geisteshaltung Georg Cantors

2.1 Der Wahrheitsbegriff Cantors

Trachtet man danach, die Auseinandersetzungen Cantors mit der Problematik des Unendlichen nachvollziehen zu können, so erweist es sich als hilfreich, die Denkweise seiner Zeit in Rechnung zu stellen. Im Besonderen ist es sowohl sinnvoll als auch nützlich, Einblick zu haben, was vor Cantor über das Unendliche gelehrt wurde.

Zur Leibniz-Feier 1867 hält Ernst Eduard Kummer eine Festrede, in der er Auffassungen verteidigt, die später – wenn auch in anderen Worten – bei Cantor anzutreffen sind. Am Ende seines Vortrags merkt Kummer über die Leibnizsche Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots,$$

an, dass bereits in der ersten Publizierung Leibniz zu dem Resultat seiner unendlichen Reihe, deren einzelne Glieder allein die ungeraden Zahlen umfasst, die Worte „Numero deus impari gaudet!“[73] hinzugefügt hat. Auf Grund dieser Äußerung wird man sich selbst bewusst, dass Leibniz bei näherer Betrachtung seiner unendlichen Reihe in ihrer einfachen und doch vielfältigen Form in Staunen und Verwunderung versetzt wurde, wie es „der Anblick des Meeres in seiner Unbegrenztheit bewirkt“. Obgleich jedem Mathematiker die wesenseigene Schönheit des mathematischen Reiches bewusst ist, so erkennt man Leibniz’ Ausruf über die Freude Gottes an den ungeraden Zahlen einen noch tiefergehenden Sinn, nämlich die Sicherheit, dass es

[72] ZERMELO, Ernst [Hg.]: Vorwort. In: Cantor, Georg: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Berlin : Verlag von Julius Springer, 1932. S III

[73] MESCHKOWSKI, Herbert: Probleme des Unendlichen : Werk und Leben Georg Cantors. Braunschweig : Vieweg & Sohn. 1967, S 58. Übersetzung: Gott erfreut sich der ungeraden Zahlen!

sich hierbei nicht um ein menschliches Machwerk, sondern um eine uns objektiv entgegentretende Schöpfung Gottes handelt. Für Leibniz ist die Freude Gottes an den ungeraden Zahlen in jeder Hinsicht eben diese religiöse Anschauung, die in der Schöpfungsgeschichte zum Ausdruck kommt: „Gott sah alles an, was er gemacht hatte: Es war sehr gut.“[74] Diese Äußerungen verdeutlichen, dass die Überzeugung Platons von dem Wesen der mathematischen Wahrheit auch im 19. Jahrhundert noch durchaus lebendig war. Gleichermaßen hat sich Cantor (später) explizit auf Platon berufen, indem er über den Begriff der „Mannigfaltigkeit“ oder der „Menge“ Folgendes verkündete:

> Ich glaube hiermit etwas zu definieren, was verwandt ist mit dem platonischen „εἶδος“ oder „ιδέα“, wie auch mit dem, was Platon in seinem Dialoge „Philebos oder das höchste Gut“ „μιχτόν“ nennt … Daß diese Begriffe Pythagoreischen Ursprungs sind, deutet *Platon* selbst an.[75]

Ideen und Auffassungen der Mathematik sind demnach nicht nur Deduktionen in einem „formalen System“, sondern ewige Wahrheiten gegen die verfehlt wird, wenn man von einer mathematische Formel nicht auf den Ursprung alles Seins schließt. Dass gerade im 20. Jahrhundert Wissenschaftler aus verschiedenen Gebieten sich von der Denkweise Platons und von jeder metaphysischen Fundierung lösten, liegt gerade in den Auseinandersetzungen Cantors mit den Problemen des Unendlichen. Darin zeigt sich auch die Tragik seines Leben, nämlich, dass er auf Grund des Widerstandes mancher Kollegen diese Entwicklung zwar erahnte, sich aber nicht mehr ernsthaft damit auseinandersetzen und somit auch nicht mehr die erkenntnistheoretische Relevanz dieser Wendung ermessen konnte.

2.2 Die Auffassung des Transfiniten bei Cantor

Die Cantorsche Theorie wird als eine mathematische Fachrichtung dargestellt, die der exakten Wissenschaft eine „neue Provinz“, nämlich die der unendlichen Mengen, zugänglich macht und damit diverse sinnvolle Differenzierungen von verschiedenen

[74] DIE BIBEL: Einheitsübersetzung der Heiligen Schrift, Gen1,31.
[75] MESCHKOWSKI: Probleme, S 60.

Arten und deren Begriffsbildungen ermöglicht. Hierbei ist es notwendig, darüber Bescheid zu wissen, dass nach der Position Cantors die Mengenlehre mit all ihren Prinzipien in der Tat der Metaphysik zugeordnet werden kann. In einem Brief an Pater Thomas Esser schreibt er, dass die allgemeine Mengenlehre ohne Frage der transfiniten Metaphysik angehört und zwar in der Weise wie sie sowohl in der Schrift *Zur Lehre des Transfiniten* als auch in dem ersten Artikel der begonnenen Arbeit *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* wiedergegeben wird. Zu dieser Überzeugung kommt man, wenn die Grundbegriffe der Mengenlehre auf den Grad ihrer Allgemeinheit prüfend in Augenschein genommen werden und sich dabei herausstellt, dass ihr Denken in jeder Hinsicht rein ist und der Phantasie nicht der geringste Spielraum zugesprochen wird. Dabei offenbart sich, dass durch den gelegentlichen Gebrauch von diesen Bildern, deren sich sowohl Cantor als auch alle anderen Metaphysiker zu einem besseren Verständnis metaphysischer Begriffe bedienen, nichts revidiert wird.

Möchte man die unterschiedlichen Thesen über den Diskussionsgegenstand des Aktual-Unendlichen[76], wie sie in den *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten* zu finden sind, verstehen und – wie im Laufe der Geschichte geltend gemacht – übersichtlich gruppieren, so bieten sich mehrere Gesichtspunkte an, von denen an dieser Stelle lediglich einer hervorgehoben wird.

> Man kann nämlich das A.-U. in *drei Hauptbeziehungen* in Frage stellen: *erstens, sofern es in Deo extramundano aeterno omnipotenti sive natura naturante*, wo es das *Absolute* heißt, *zweitens* sofern es *in concreto seu in natura naturata* vorkommt, wo ich es *Transfinitum* nenne und *drittens* kann das A.-U. *in abstracto* in Frage gezogen werden, d.h. sofern es von der menschlichen Erkenntnis in Form von *aktual-unendlichen*, oder wie ich sie genannt habe, von *transfiniten Zahlen* oder in der noch allgemeineren Form der *transfiniten Ordnungstypen* (*ἀριθμοὶ νοητοὶ* oder *εἰδητιχοί*) aufgefaßt werden könne.[77]

[76] Bei Cantor findet man der Kürze wegen für das Aktual-Unendliche die Abkürzung A.-U..
[77] CANTOR, Georg: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, S 372.

Beschränkt man sich – ungeachtet des ersten dieser drei Probleme – auf die beiden letzteren – so eröffnen sich von selbst vier unterschiedliche Standpunkte, welche auch tatsächlich in der Vergangenheit und der Gegenwart vorhanden sind. Zunächst kann das Aktual-Unendliche sowohl in concreto wie auch in abstracto verworfen werden.[78] Des Weiteren kann das Aktual-Unendliche in concreto bejaht, hingegen in abstracto negiert werden[79]. Dem entgegengesetzt kann man an dritter Stelle jenes in abstracto bejahen, dagegen aber in concreto verneinen.[80] Zu guter letzt kann im Sinne Cantors an vierter Stelle das Aktual-Unendliche sowohl in concreto wie auch in abstracto bejaht werden:

> […] auf diesem Boden, den ich für den *einzig richtigen* halte, stehen nur wenige; vielleicht bin ich der zeitlich erste, der diesen Standpunkt mit voller Bestimmtheit und in allen seinen Konsequenzen vertritt, doch das weiß ich sicher, daß ich nicht der letzte sein werde, der ihn verteidigt![81]

Bereits Jahrhunderte vor Cantor war die Frage nach dem Aktual-Unendlichen von diversen Philosophen und Theologen gestellt worden, wobei Cantors Kritik an den Aussagen des Kirchenvaters Thomas von Aquin mit Recht von ihm geäußert wurde, da jener lediglich belegen konnte, dass man der Antwort auf dieser Frage noch nicht auf den Grund gekommen war.

Von Cantors Seite her wird das nur „in Deo“ realisierte Absolut-Unendliche aus diesem Grund zitiert, um das Anrecht eines mathematischen Kalküls des Transfiniten zu garantieren, da mitunter von Theologen und Philosophen die Position verteidigt wurde, wonach das Unendliche seinem Wesen nach „unteilbar“ und folglich „unveränderlich und immerwährend“ sei, es aus diesem Grund nicht vermehrt und eben deshalb mit dem „Grund aller Dinge, Gott“ verglichen werden könne.

[78] Dieses Verhalten zeigt sich bei allen sogenannten Positivisten und deren Verwandten. Als bekanntester Vertreter kann hier z.B. Augustin Louis Cauchy benannt werden.
[79] Als Vertreter dieser Einstellung sind z.B. René Descartes, Baruch de Spinoza, Gottfried Wilhelm Leibniz und John Locke zu nennen.
[80] Für diese Position spricht sich eine Seite der Neuscholastiker aus, obgleich sich ein anderer und vielleicht der größere Teil der Neuscholastiker, basierend auf der Enzyklika Leos XIII., für den ersten dieser vier Standpunkte weiterhin einsetzt.
[81] CANTOR: Abhandlungen, S 373.

Um den Gegenstand seiner Forschung voranzutreiben, spricht Cantor eben jener Form dieser Auffassung Geltung zu, indem er der Kategorie des „Absolut-Unendlichen" Gültigkeit zuspricht, aber sie gleichzeitig vehement gegen das „Transfinite", das „Aktual-Unendliche" abgrenzt.

Die beiden Formen des Aktual-Unendlichen werden immer wieder ein Opfer von Verwechslung in der Weise, als nämlich das Transfinite mit dem Absoluten vermengt wird. Deswegen muss gerade hier zwischen diesen beiden Begriffen aufs Strengste differenziert werden, sofern ersteres ein „zwar Unendliches, aber doch *noch Vermehrbares*, letzteres hingegen „wesentlich als *unvermehrbar* und daher mathematisch *undeterminierbar*" zu denken ist. Cantor stellt hierbei fest, dass sich seit Kant die fehlerhafte Vorstellung unter den Philosophen etabliert hat, als sei „das Absolute die ideale Grenze des *Endlichen*, während in Wahrheit diese Grenze nur als ein *Transfinitum*, und zwar als das *Minimum alles Transfiniten*"[82] gedacht werden kann, entsprechend der von Cantor selbst mit ω bezeichneten „*kleinsten* überendlichen Zahl".

Es soll an dieser Stelle darauf verzichtet werden, auf die unterschiedlichen Positionen für und wider das Aktual-Unendliche aus Cantors philosophischen Arbeiten einzugehen, da von ihm eine zusammenfassende Reaktion auf mancherlei Einwürfe gegen seine Theorie des Aktual-Unendlichen zitiert werden kann.

> *Alle sogenannten Beweise wider die Möglichkeit aktual unendlicher Zahlen sind, wie in jedem Falle besonders gezeigt und auch aus allgemeinen Gründen geschlossen werden kann, der Hauptsache nach dadurch fehlerhaft, und darin liegt ihr πρῶτον ψεῦδος, daß sie von vornherein den in Frage stehenden Zahlen alle Eigenschaften der endlichen Zahlen zumuten oder vielmehr aufdrängen, während sie unendlichen Zahlen doch andrerseits, wenn sie überhaupt in irgendeiner Form denkbar sein sollen, durch ihren Gegensatz zu den endlichen Zahlen ein ganz neues Zahlengeschlecht konstituieren müssen, dessen Beschaffenheit von der Natur*

[82] CANTOR: Abhandlungen, S 375.

> *der Dinge durchaus abhängig und Gegenstand der Forschung, nicht aber unserer Willkür oder unserer Vorurteile ist.*[83]

Eben daher denunziert Cantor jedwede Kritik gegen das Aktual-Unendliche, ob sie nun auf Aussagen von Kirchenvätern wie Thomas von Aquin oder auf jene von herausragenden Mathematikern wie Gauß basieren, mit dem Hinweis, dass er ja eine fundierte Theorie des Unendlichen erschaffen habe, die frühere Gelehrte für unmöglich hielten.

Es besteht natürlich die Möglichkeit, dass ein zeitgenössischer Leser sich durch diese Zeilen in der Weise unbehaglich fühlt, als sei er mit der Schlussweise Cantors in das Mittelalter zurückversetzt wird. Dennoch:

> Wer die Denkweise der *modernen* Mathematik würdigen, wer den Sinn des modernen Formalismus verstehen will, muß die Gedankenwelt des 19. Jahrhunderts kennen. *Cantor* ist vielleicht einer der letzten, gewiß aber einer der bedeutendsten Vertreter des an *Platon* orientierten Denkens.[84]

Man vergeudet folglich nichts an Zeit, sondern lernt obendrein noch einiges hinzu, wenn man sich mit den philosophischen Überlegungen Cantors befasst, selbst wenn man irgendwann an einen gewissen Punkt ankommt, an dem man den Überlegungen des genialen Begründers der Mengenlehre nicht mehr zu folgen im Stande ist. Gegen manche Einwände ist gerade der Aspekt, dass Cantor nicht nur die Mathematik, sondern auch die Philosophie und Theologie in seine Forschungen miteinbezieht, faszinierend. Es war ein wesentliches Anliegen Cantors, dass seine Arbeiten nicht nur der Mathematik zugehören, sondern darüber hinaus für die Metaphysik von Relevanz sind, denn darin bestand sein (gelegentliches) Bemühen, die Mathematik – und hier vor allem die Mengenlehre – in ein großes System wissenschaftlicher Forschung zu integrieren, welches sich noch der Frage stellte, „was die Welt im Innersten zusammenhält". In diesem Zusammenhang spricht er in einem Brief an Pater

---

[83] CANTOR: Abhandlungen, S 371f.
[84] MESCHKOWSKI: Probleme, S 112.

Thomas Esser von dem „unzerreißbaren Band, das die Metaphysik mit der Theologie verbindet". Auf diese Weise erwirbt sich auch die Mengenlehre ihre wichtige Position im erkenntnistheoretischen Kontext.

2.3 Cantors Ontologie und Religion

Der deutsche Mathematiker Kurt Reidemeister hat einst über Platon festgestellt, dass über dessen Denken „der Glanz des Seins" liege. Dies kann auch über die Ideenwelt Cantors ausgesagt werden, der deshalb Platoniker genannt werden kann, weil ihm die ontologische Fundierung der Mathematik „Wecker der Erkenntnis" ist, und zwar in dem Sinn, als aus der Einsicht in die mathematischen Prinzipien metaphysische Erkenntnis erlangt werden kann.

Doch worin liegt die Bedeutsamkeit, wenn Cantor seiner Mengenlehre metaphysischen Charakter zuschreibt? Auskunft hierüber findet sich in einer handgeschriebenen Notiz von Cantor, die da lautet:

> Ohne ein Quentchen Metaphysik läßt sich, meiner Überzeugung nach, keine exacte Wissenschaft begründen. Man entschuldige daher die wenigen Worte, welche ich im Eingang über diese in neuerer Zeit meist so verpönte Doctrin zu sagen wage. Metaphysik ist, wie ich sie auffasse, die Lehre vom *Seienden*, oder was dasselbe bedeutet von dem was *da ist*, d. h. existirt, also von der Welt wie sie an sich ist, nicht wie sie uns erscheint. Alles was wir mit den Sinnen wahrnehmen und mit unserm abstracten Denken uns vorstellen ist *Nichtseiendes* und damit höchstens eine Spur des an sich Seienden.
>
> Daß aber ein Seiendes ist, wird von uns nicht durch abstractes Denken erkannt, vielmehr wird es an uns selbst *empfunden* und wir sind damit des Seienden ohne einen Beweis dafür nötig zu haben, vollkommen sicher. Wir *sind*, da wir *existieren*, also giebt es ein Seiendes. Nicht nur wir sind da, auch andere von uns verschiedene Seiende sind da, wir leben zusammen und machen eine Welt aus, deren Teile alle miteinander in Verkehr stehen. Wer dies zu leugnen wagt, ziehe sich in sein eignes Selbst zurück und sehe zu, wie weit er damit komme.

> Jedes Seiende kann Gegenstand unsres Denken sein. Dann nennen wir es ein Ding, und alles Nichtseiende, das Gegenstand unseres Denkens ist, nennen wir ein Unding (non ens). So bin ich ein Ding, und jeder andre Mensch ist auch ein Ding.[85]

Worin aber besteht das Vermögen einer mathematischen Konstruktion wie der Mengenlehre Aussagen über das „Sein" kundzutun? Bereits an früherer Stelle wurde darüber berichtet, dass in der Arbeit *Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche* Cantor sich für die Option einsetzt, wonach das Aktual-Unendliche sowohl in abstracto wie in concreto bejaht oder verworfen werden kann. Hieraus ergeben sich vier mögliche Kombinationen, wobei Cantor als erster, aber sicher nicht als letzter, jene Position vertritt, welche das Aktual-Unendliche „sowohl in concreto[86] wie auch in abstracto" bejaht.

Um diesen Gedankengängen folgen zu können, muss man die Denkweise Cantors und die vieler seiner Zeitgenossen im Gedächtnis behalten, denn: Die mathematischen Aussagen hatten im Besonderen als Ideen der platonischen Welt ein stabiles ontologisches Fundament und fanden zugleich ihr Äquivalent in der physikalischen Welt. Insbesondere ist hier der Begriff des Kontinuums zu nennen, dem, obgleich die diskrete Struktur der Mathematik noch unbekannt war, physikalische Relevanz zugesprochen wurde. Aus diesem Grund hat Cantor der mathematischen Erfassung des Aktual-Unendlichen auch für die Veranschaulichung der physikalischen Prozesse Bedeutung zugeschrieben und beschlossen, ausschließlich eine solche Definition des Kontinuums gelten zu lassen, die für die „Erklärung der Phänomene" in der Tat geeignet ist.

Es ist unmöglich, Cantor gerecht zu werden, wenn man ihn „nur" als einen Mathematiker ansieht, der Definitionen, Formeln und Beweise zu einer neuen Theorie zusammensetzt. Tatsächlich fühlte er sich als evangelischer Christ der römischen Kirche eng verbunden, wie man an seiner umfangreichen Bibliothek mit all ihren philosophischen und theologischen Werken sehen konnte. Seine umfassende Kenntnis der

---

[85] MESCHKOWSKI: Probleme, S 114.
Meschkowski zufolge werden diese Aussagen bei all jenen Denkern auf Resonanz stoßen, die heute mit Heidegger die „Seinsvergessenheit" des modernen Menschen beklagen.

[86] In der Bejahung des Aktual-Unendlichen in „concreto" stimmt man der Überzeugung über das Vorkommen aktual-unendlicher Mengen in der Wirklichkeit zu.

Geschichte der Philosophie legt Zeugnis dafür ab, dass Cantors Bestrebungen in der Integration seiner mathematischen Forschungen in eine Gesamtschau der Welt lagen. Und so ist es nicht verwunderlich, dass philosophisch orientierte Kreise katholischer Theologen den Ideen Cantors mitunter mehr Verständnis entgegen brachten als die meisten Mathematiker seiner Zeit. Konzentriert man sich auf die Briefe Cantors, so ragt Meschkowski zufolge vor allem die Geschlossenheit seines Weltbildes heraus:

> Die Mengenlehre und darüber hinaus die *Prinzipien* der Mathematik und der Naturwissenschaft gehören zur Metaphysik, weil sie es mit der Ontologie zu tun haben. Die Metaphysik aber ist eine Hilfswissenschaft der Theologie.[87]

In einem Brief an Pater Esser schreibt Cantor, dass er von vornherein die Position vertritt, wonach sich das Kernstück seiner Diskurse auf philosophischem Gebiet bewegt. Und so sieht er sich dahingehend veranlasst – um Fehlinterpretationen und Überraschungen von Anfang an zu vermeiden –, auf zweierlei Punkte aufmerksam zu machen:

> […] erstens auf das unzerreißbare Band, das die Metaphysik mit der Theologie verbindet; indem einerseits Letztere gleichsam der Leitstern ist, nach dem sich erstere in ihren Bahnen richtet und von welchem sie Licht erhält, wenn die natürlichen und ordinären Leuchten versagen; andererseits bedarf die Theologie zu ihrer wissenschaftlichen Entwicklung und Darstellung der gesamten Philosophie, die also im Dienstverhältnis zu jener steht. Daraus folgt […]: a), daß bei einer metaphysischen Discussion unvermeidbar auch die Theologie gelegentlich mitspricht; b), daß jeder wirkliche Forschritt in der Metaphysik auch die Hülfsmittel der Theologie selbst verstärkt oder vermehrt, ja unter Umständen sogar dazu füh-

[87] MESCHKOWSKI: Probleme, S 122.

> ren kann, daß Glaubensgeheimnisse zu tieferen, gehaltvolleren symbolischen Einsichten kommt als es vorher zu erwarten oder zu ahnen war.[88]

Von daher ist die Sichtweise des Verhältnisses von Mathematik, Metaphysik und Theologie zu verstehen, wenn Cantor die Reihe seiner Alephs[89] – nach einem Bericht von Kowalewski – als „etwas Heiliges“, als „die Stufen, die zum Throne Gottes emporführen“ begreift. Möchte man dem Lebenswerk Georg Cantors in seiner Gänze Anerkennung zollen, so darf man seine Religiosität, seine Vertrautheit mit den Kirchenvätern und der Scholastik, sein Bemühen tunlichst nicht gegen die Grundlinien der katholischen Theologie zuwiderzuhandeln und seine umfangreichen Korrespondenzen mit katholischen Theologen nicht übersehen. Der Beweggrund für die Entwicklung dieser Nähe zur katholischen Kirche liegt wohl darin, dass ihm von katholischer Seite aus für seine metaphysisch fundierte Theorie des Aktual-Unendlichen viel mehr an Verständnis entgegengebracht wurde als von Gelehrten der Mathematik.

Cantors langjähriges Begehren war es, als Professor an eine Universität mit größerem mathematischem Wirkungskreis berufen zu werden. Dieser Wunsch blieb jedoch unerfüllt und so wirkte er Zeit seines Lebens in Halle. In einem Brief vom Jahr 1894 schreibt er über seine Stellung zur Religion:

> Metaphysik und Theologie haben, ich will es bekennen, meine Seele in solchem Grade ergriffen, daß ich verhältnismäßig wenig Zeit für meine *erste Flamme* übrig habe.
>
> Wäre es nach meinen Wünschen vor fünfzehn, ja sogar noch vor acht Jahren gegangen, so hätte man mir einen größeren mathematischen Wirkungskreis, etwa an der Universität Berlin oder Göttingen gegeben […] Allein nun danke ich Gott, dem Allweisen und Allgütigen, daß er mir

88 MESCHKOWSKI: Probleme, S 123.

89 Unter dem Begriff „Aleph“ versteht man eine unendliche Kardinalzahl. Allgemein bedeutet Aleph-a bzw. $\aleph_a$ die a-te unendliche Kardinalzahl. Deshalb ist $\aleph_0$ nichts anderes als die 0-te unendliche Kardinalzahl. Es stellt sich heraus, dass es bei den Kardinalzahlen möglich ist, stets noch mehr Zahlen zu finden. Die Reihe der Alephs sieht folgendermaßen aus: Nach $\aleph_0$ kommen $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$, … $\aleph_n$, $\aleph_{n+1}$, … und so weiter. Es gibt niemals einen Schlusspunkt, wenn man es mit transfiniten Zahlen zu tun hat. Näheres hierzu an anderer Stelle.

> die Erfüllung dieser Wünsche für immer versagt hat, denn so hat er mich gezwungen durch ein tieferes Eindringen in die Theologie Ihm und seiner heiligen-römisch-katholischen Kirche zu dienen, als ich es nach meinen wahrscheinlich schwachen mathematischen Kräften durch die *ausschließliche* Beschäftigung mit der Mathematik hätte tun können.
>
> So erstreckt sich meine […] Tätigkeit schon seit Jahren hauptsächlich nach zwei Richtungen. Erstens wirke ich nach Kräften auf die Geistlichkeit mit der ich innigst befreundet bin und zwar handle ich da nach den Worten: ‚Ihr seid meine Lehrer in der Religion und Theologie, ich Euer dankbarer Sohn und Schüler. Von Euch und Eurem guten Willen hängt es allein ab, ob ich Euer Lehrer werde in den weltlichen Wissenschaften und so eine goldene Brücke schlage von Euch zu uns, von uns zu Euch.‘ Zweitens wende ich mich an den Kreis der gebildeten Laien […] um sie von den grassierenden Verirrungen des Skeptizismus, Atheismus, Materialismus, Positivismus, Pantheismus etc. abzubringen und sie allmählich dem allein vernunftgemäßen Theismus wieder zuzuführen …[90]

Ausgehend von der biblischen Schöpfungsgeschichte verteidigt Cantor die Überzeugung, wonach die Welt einen Anfang in der Zeit habe. Die Erwägung einer unendlich verflossenen Zeit ist seinem Sinne nach ein „monströser Ungedanke“, eine pathologische Erscheinung der neueren Zeit und ihrer Wissenschaften. Indessen steht es außer Frage, dass Cantor den üblichen „Beweis“ der Nichtexistenz eines Aktual-Unendlichen nicht anerkennen kann, obgleich daraus die Unmöglichkeit einer „seit Ewigkeiten“ bestehenden Welt folgen würde.

Darin zeigt sich auch ein besonderer Wesenszug Cantors, denn so revoltierend er in seinen mathematischen Ideen auch gewesen ist, so konservativ erscheint er in Fragen der Religion und der Weltanschauung. Doch dieses Beharren auf den klassischen Lehren des Christentums ist kein Zeichen von Autoritätsgläubigkeit oder Passivität, sondern seines Glaubens an einen denkenden Menschen, der die von Gott geschaffene Welt durchschaut. Die Überzeugung Cantors deckt sich zwar oft, wenn auch nicht immer, mit der der großen Konfessionen, doch sie fügt sich zusammen mit seinen mathematischen Forschungen, in denen er vermittels seiner Mengenlehre das

[90] MESCHKOWSKI: Probleme, S 124f.

christliche Weltbild stärken möchte. Um seine absolute theologische Autarkie auszudrücken, betont er nicht nur seine Unabhängigkeit von der katholischen Kirche, sondern er beteuert sogar, dass er keiner bestehenden organischen Kirche zugeordnet werden kann. Obwohl wir in unserer heutigen Zeit dem Weltbild Cantors kaum mehr folgen können, so kann man von ihm sagen, dass er in dem Sinne Christ war, als er seine Fehler und Irrtümer eingestehen konnte. Es war seine Zielsetzung, die Ergebnisse seiner Forschungen auf verschiedenen Gebieten in einen größeren Zusammenhang zu bringen, was auch aus vielen seiner Briefe hervorgeht:

> Er schätze die Mathematik als eine Vorstufe der Metaphysik, und die Fortschritte auf dem Gebiet der Mengenlehre waren ihm zugleich bedeutsame Schritte zur Erkenntnis von Gott und Welt.[91]

3 Die Kontinuumhypothese – Eine Herausforderung für die Mathematik

3.1 Eine notwendige, aber hilfreiche mathematisch Einführung – Cantors Zahlen

3.1.1 Transfinite Zahlen

Cantor definiert eine reelle Zahl primär als eine unendliche Folge von Ziffern. Seine persönliche Zugangsweise ist insofern originell, als er nicht mehr vortäuscht, dass der Grenzwert bzw. die Summe einer unendlichen Reihe, die von einer reellen Zahl vertreten wird, eine von außen wahrnehmbare – nicht in der Reihe selbst vorliegende – Relevanz nachweist. Demnach ist die Summe einer Reihe nichts anderes als die Reihe selbst. Wichtig ist in diesem Zusammenhang, dass Cantor der These ein Ende setzt, wonach reelle Zahlen in erster Linie von endlicher Länge sind, sondern er verwendete sie vielmehr als beliebige unendliche Reihen von der Form $n, r_1 r_2 r_3 r_4 \ldots$. Dedekind, ein Zeitgenosse Cantors, definierte reelle Zahlen mit Hilfe von unendlichen Mengen, wobei in seiner Definition der reellen Zahlen maßgeblich ist, dass diese Zahlen selbst schon als unendliche Mengen vorkommen. Hier kommt es vor allem darauf an, dass die einzige Praktik, die zu einer gut fundierten mathematischen Be-

[91] MESCHKOWSKI: Probleme, Vorwort,

deutung für den Begriff „beliebig reelle Zahl“ führt, eben diese ist, die reellen Zahlen mit Hilfe von aktual-unendlichen Mengen darzustellen. Man kann also kein absolutes Fundament für das System der reellen Zahlen im Bereich diskreter mathematischer Objekte in Erfahrung bringen. Ist einem erst einmal bewusst geworden, dass irrationale Zahlen in dem Sinne etwas fundamental Unendliches sind, als sie nur mit Unterstützung einer Theorie der unendlichen Mengen begründet werden können, so erscheint eine Beschäftigung mit unendlichen Zahlen plausibel. Diese werden von Cantor als transfinite Zahlen bezeichnet. Sein Lieblingsargument für die Verteidigung dieser Zahlen und ihrer Realität im Bereich der Mathematik liegt in ihrer metaphysischen und mathematischen Ähnlichkeit zu den irrationalen Zahlen und ihrer Bedeutung für die Stetigkeit der reellen Zahlengerade.

> Die transfiniten Zahlen sind in gewissem Sinne selbst *neue Irrationalitäten* und in der Tat ist die in meinen Augen beste Methode, die *endlichen* Irrationalzahlen zu definieren […] Man kann unbedingt sagen: die transfiniten Zahlen *stehen oder fallen* mit den endlichen Irrationalzahlen; sie gleichen einander ihrem innersten Wesen nach; denn jene wie diese sind bestimmt abgegrenzte Gestaltungen oder Modifikationen (ἀφωρισμένα) des aktual Unendlichen.[92]

Cantor als auch Dedekind vertreten die Position, dass sowohl unendliche Mengen als auch transfinite Zahlen real existieren und sich beide in den aktualen Unendlichkeiten der realen Welt „widerspiegeln“. Nach Cantor ist die Mathematik in dieser Angelegenheit nur daran gebunden, eine nachvollziehbare Einführung neuer Zahlen und ihrer Definitionen zu geben, durch die ein Bezug zu älteren Zahlen aufgebaut werden kann und sie im Fall der Fälle untereinander bestimmt und gegeneinander abgegrenzt werden können.

3.1.2 Endliche Kardinalzahlen

Ein überaus genialer Kunstgriff Cantors war es, ein leistungsstarkes und wichtiges Instrument zu finden, womit er unendliche Mengen vergleichen konnte. Die entschei-

[92] CANTOR: Abhandlungen, S 395f.

dende Idee, die dahinter steht, ist die Eins-zu-eins-Übereinstimmung[93] mit der Menge aller natürlichen Zahlen bzw. der Menge aller positiven ganzen Zahlen nämlich $\{1,2,3,...\}$. Maßgebend ist hierbei, dass diese Menge ausnahmslos gezählt und somit als eine „abzählbare Menge" bezeichnet werden kann, obgleich dieser Zählprozess in der Praxis niemals zu einem Ende kommt. Als Ergebnis dieser Überlegungen entwickelt Cantor den Begriff der Abzählbarkeit: „Eine unendliche Menge A ist genau dann abzählbar, wenn zwischen A und der Menge aller positiven ganzen Zahlen eine 1-1Ü besteht." Die Menge aller positiven ganzen Zahlen, d.h. $\mathbb{Z}^+$ [94], konstituiert eine Art „Basiskardinalzahl" für unendliche Mengen für deren Mächtigkeit Cantor das berühmte Symbol „$\aleph_0$" eingeführt hat. Folglich kann man die Mächtigkeiten anderer unendlicher Mengen mit $\aleph_0$ vergleichen, indem man untersucht, ob diese eindeutig der Menge aller positiven ganzen Zahlen zugeordnet werden kann. Von daher erscheint die gesamte Idee, die „Größen" unendlicher Mengen zu vergleichen, auf einmal als abwegig, denn eine unendliche Menge kann per Definition die gleiche „Größe" bzw. „Mächtigkeit" aufweisen, wie eine Menge, die diese definitionsgemäß an Größe übertrifft.

Unterzieht man zunächst einmal die Mächtigkeit der Menge aller positiven ganzen Zahlen $\mathbb{Z}^+$ und der Menge aller ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ einer Prüfung (in diesem Fall werden die Null und die negativen ganzen Zahlen miteinbezogen), dann stehen einem gewisse Hindernisse im Weg, denn: Während die erste Menge die Zahl „1" als ihr erstes (kleinstes) Element hat, kann letztere nicht damit dienen. Bei dem Vergleich dieser Mengen aber haben wir das Glück, dass über die Mächtigkeit gesprochen wird und nicht über die Ordnung der Elemente dieser Mengen. Deshalb können wir die Elemente in der Menge aller ganzen Zahlen so umordnen, dass diese zwar kein kleinstes, aber ein erstes Element vorweisen kann und wir eine perfekte 1-1Ü erhalten: Während die Ordnung der natürlichen Zahlen beibehalten wird, ordnen wir die ganzen Zahlen in folgender Weise um: $0,-1,1,-2,2,$ … Die passende Zuordnung zwischen den natürlichen und den ganzen Zahlen sieht dann folgenderweise aus:

---

[93] Für den Begriff „Eins-zu-eins-Übereinstimmung" wird nun die Abkürzung „1-1Ü" eingeführt.

[94] Für den Begriff „Menge aller positiven ganzen Zahlen" kann auch die Abkürzung „$\mathbb{Z}^+$" verwendet werden.

$$
\begin{array}{lcccccc}
\mathbb{N}: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
\mathbb{Z}: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & \dots
\end{array}
$$

Mit diesem Ansatz hat Cantor beweisen können, dass die Menge aller ganzen Zahlen abzählbar ist bzw. dass die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gleichmächtig sind, wenngleich wir nicht alle Elemente durchzählen können. Darauf aufbauend nimmt sich Cantor den Größenvergleich zwischen der unendlichen Menge der rationalen Zahlen und jener der natürlichen Zahlen als Vergleichsmenge vor.

Rein intuitiv würde man davon ausgehen, dass die Menge aller rationalen Zahlen[95] „größer" als die aller natürlichen sei, denn schon allein die Überlegung, wie viele rationale Zahlen zwischen den natürlichen Zahlen „0" und „1" aufgelistet werden können, legt es nahe, dass erstere „um vieles größer" sei als die Vergleichsmenge. Auf den ersten Blick sieht es deshalb so aus, als sei die Menge aller rationalen Zahlen nicht abzählbar, da ihr außerdem nicht nur ein kleinstes Element fehlt, sondern auch das nächstgrößere Element sich nicht ausfindig machen lässt. Cantor findet jedoch einen Weg, wie die Menge aller rationalen Zahlen, nämlich $\mathbb{Q}$, in eine Reihe angeordnet werden kann, sodass diese ein erstes Element, ein zweites Element, und so weiter, hat. Er nennt die Vorgehensweise, bei der eine Menge in eine Reihe übergeführt wird, „Abzählung einer Menge".[96]

Cantor hat demzufolge eine Methode entwickelt, durch welche er ein Schema einer linear geordneten Folge erhält, in der alle rationalen Zahlen „der Reihe nach" aufgelistet werden können und kommt so zu dem Ergebnis, dass die Menge aller rationalen Zahlen definitiv abzählbar ist und somit über die gleiche Mächtigkeit verfügt wie die Menge der ganzen Zahlen, nämlich $\aleph_0$.

Danach stellte sich Cantor die Frage, ob die Menge aller reellen Zahlen „größer" als die der Menge aller rationalen Zahlen ist. In seinem Beweis geht es also um die Fra-

[95] Wenn die Rede von „allen Zahlen" ist, dann meint man fortan an nur positive Werte.
[96] „Abzählung einer Menge" bedeutet, dass „die gültige Konstruktion einer geordneten Reihe einen Beweis darstellt, dass die Menge aller rationalen Zahlen tatsächlich abzählbar ist (das heißt 1-1-korrespondierbar mit und daher von gleicher Mächtigkeit wie die Menge aller ganzen Zahlen)."

ge nach der Abzählbarkeit der reellen Zahlen, nämlich $\mathbb{R}$, und damit verbunden um die Mächtigkeit der reellen Zahlen im Vergleich zu den rationalen Zahlen. Stellt sich nämlich heraus, dass die reellen Zahlen nicht abzählbar sind, dann wäre ihre Mächtigkeit größer als die der rationalen Zahlen. Der dafür notwendige Beweis Cantors ist ein Widerspruchsbeweis, indem zunächst einmal angenommen wird, dass die Menge aller reellen Zahlen in der Tat abzählbar ist – also, dass diese in einer geordneten Folge aufgelistet werden können, die eine unendliche Tabelle unendlicher nichtabbrechender Dezimalzahlen einschließt. Cantor strebt danach, seine eigene These zu beweisen, die besagt, dass eine solche unendliche Tabelle niemals alle reellen Zahlen erschöpfend erfasst. Um dies zu beweisen, muss eine solche reelle Zahle gefunden bzw. konstruiert werden, die nicht in der Folge enthalten sein kann, da sie sich nachweislich von jeder anderen reellen Zahl unterscheidet. Somit wurde die anfänglich formulierte Behauptung widerlegt, dass die Menge aller reellen Zahlen abzählbar ist, da sie nicht eindeutig auf die Menge aller rationalen Zahlen abgebildet werden kann, die selbst abzählbar und demnach 1-1-korrespondierbar mit der Menge aller positiven ganzen Zahlen ist. Folglich ist die Menge aller reellen Zahlen „überabzählbar“ und ihre Mächtigkeit ist größer als die aller rationalen Zahlen.[97]

Da die Mächtigkeit unendlich abzählbarer Mengen von Cantor $\aleph_0$ genannt wird, wäre die Annahme naheliegend, dass er die Mächtigkeit der Menge aller reellen Zahlen mit „$\aleph_1$“ bezeichnet. Doch dem ist nicht so. Cantor führt aus „komplizierten Gründen“ für diese Mengen die Kardinalzahl c ein, die auch für die „Mächtigkeit des Kontinuums“ steht und in diesem Zusammenhang deutlich wird, dass „die Nichtabzählbarkeit der reellen Zahlen die Stetigkeit der reellen Zahlengeraden erklärt.“

3.1.3 Endliche Ordinalzahlen

Im Unterschied zu den Kardinalzahlen $1,2,3,...$ bezeichnet die Ordinalzahl die Position, an der sich die Zahl innerhalb einer geordneten Folge befindet, also an $1.,2.,3.,...$ Stelle, doch sie sagt nichts darüber aus, worum es sich eigentlich handelt.

Befasst man sich mit den Ordnungszahlen in der Mengenlehre, so kann man erkennen, dass sie in diesem Zusammenhang einen etwas anderen Stellenwert haben, da

[97] Der genaue Beweis über die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen kann in diverser Fachliteratur nachgelesen werden.

sie in Beziehung zu den Ordnungstypen von Mengen stehen.[98] Deshalb ist es einleuchtend, dass der Umgang mit Ordinalzahlen komplizierter ist als jener mit den Kardinalzahlen, denn hier geht es nicht allein um die Anzahl der Elemente einer Menge, sondern um die Weise der möglichen Permutationen ihrer Anordnung, die einen Großteil der Theorie der Ordnungszahlen festlegen.[99] Aus diesem Grund lässt sich eine allgemeine Definition der Ordnungszahl finden: „Es ist eine Zahl, die angibt, wo ein bestimmtes Element einer Menge in einem gewissen Ordnungstyp auftaucht."[100] Zugleich gilt das grundlegende Faktum, dass bei (zwei) endlichen Mengen mit derselben Kardinalzahl bzw. derselben Mächtigkeit diese zum gleichen Ordnungstyp gehören. Die eindeutige Zuordnung zu Ordnungstypen wird erst bei unendlichen Mengen kompliziert.

> Exkurs: Betrachtet man z.B. die abzählbar unendliche Menge aller positiven ganzen Zahlen $\{1,2,3,4,...\}$, dann ist es offensichtlich, dass diese mehr als einen Ordnungstyp vorweisen kann. Doch kann es keine zufriedenstellende Lösung sein, einzig und allein gewisse Zahlenstücke in der unendlichen Folge umzuordnen, denn diese Menge kann dessen ungeachtet der ursprünglichen Menge aller positiven ganzen Zahlen zugeordnet werden. Nimmt man allerdings eines der Elemente aus der Menge $\mathbb{Z}^+$ und setzt es an die letzte Stelle – z.B. $\{1,3,4,5,6,7,...,2\}$ – dann hat man einen völlig anderen Ordnungstyp, da diese nicht mehr 1-1korrespondierbar mit einer regelmäßig geordneten Menge der Kardinalität $\aleph_0$ ist. Die ursprüngliche Menge $\mathbb{Z}^+$ hat kein letztes Element, das der Zahl 2 zugeordnet werden könnte. Zudem ist es unerläßlich, zu bedenken, dass 2 in dem neuen Ordnungstyp zu einer anderen Ordnungszahl wird, da sie nicht länger mehr das zweite Element in der Menge ist, sondern das letzte und sich keine spezifische Zahl finden lässt, die ihr unmittelbar vorausgeht.

[98] Es ist bereits bekannt, dass zwei Mengen A und B in dem Fall 1-1korrespondiertbar sind, wenn sie gleichmächtig sind. Demzufolge gehören A und B dann zum gleichen Ordnungstyp, wenn diese 1-1-Ü in einer solchen Weise in die Tat umgesetzt werden kann, dass die Ordnung der Elemente beider Mengen nicht umgewälzt werden kann. Als einfaches Beispiel hierfür dienen zwei Mengen – wie z.B. die Menge aller positiven ganzen Zahlen und die der Menge aller ganzen Zahlen –, die zwar die gleiche Mächtigkeit aufweisen, aber zu unterschiedlichen Ordnungstypen gehören.

[99] Die Theorie der Ordnungszahlen werden wir dabei – soweit es möglich ist – der Einfachheit halber nicht näher behandeln.

[100] WALLACE, David Foster: Georg Cantor : Der Jahrhundertmathematiker und die Entdeckung des Unendlichen / David Foster Wallace. Aus dem Amerikanischen von Helmut Reuter. München [u.a.]: Piper, 2007, S 375f.

Die erste endliche Ordinalzahl ist die „0“. Mit Hilfe zweier mathematischer Prinzipien – auf die wir nicht näher eingehen wollen – erhalten wir nicht nur die erste Ordnungszahl und ihre Nachfolger, d.h. $0,1,2,3,...$, sondern können über diese unendliche Folge von endlichen Ordinalzahlen hinauskommen bis zur Ordinalzahl ω, die auch als $\aleph_0$ bezeichnet wird.

> Exkurs: Möglicherweise entschied sich Cantor für den Buchstaben „Omega“ für jene Zahl, die nach allen endlichen Zahlen folgt, weil er im griechischen Alphabet an letzter Stelle seinen Platz hat und bereits in der Offenbarung des Johannes vorkommt: „Er, der auf dem Thron saß, sprach: Seht, ich mache alles neu. Und er sagte: Schreib es auf, denn diese Worte sind zuverlässig und wahr. Er sagte zu mir: Sie sind in Erfüllung gegangen. *Ich bin das Alpha und das Omega, der Anfang und das Ende*.“[101]

Wir „besitzen“ nun also die Ordinalzahlen $0,1,2,3,...,\omega$, die sich erweitern lassen zu der Folge $0,1,2,3,...,\omega,\omega+1,\omega+2,\omega+3,...,\omega+\omega(=\omega\cdot 2),...\omega\cdot\omega(=\omega^2),\omega^3,...\omega^\omega...$ Man kann zu diesem Zeitpunkt schon vorausahnen, dass diese Möglichkeiten den Weg zu immer größer werdenden Ordinalzahlen weisen. Doch jedes Verfahren, das man sich zu erdenken vermag, um die größer werdenden Ordinalzahlen mit einem Namen zu versehen, wird an irgendeinem Punkt einmal scheitern. Schlussendlich macht es irgendwann „klick“ und der Verstand entfaltet eine kurzzeitige Ahnung davon, was absolut Unendliches sein könnte.

Aber was ist das absolut Unendliche nun wirklich? Was ist dieses Ω, das jenseits aller Ordinalzahlen liegt? Kann man denn jemals auf eine befriedigende Antwort dieser Frage stoßen, oder täten wir gut daran, zu erkennen, dass wir uns diesem absolut Unendlichen immer nur annähern können. Zunächst einmal ist das absolut Unendliche für uns unbegreiflich, es ist unergründlich und kein relativer Begriff, denn die Gerade der Ordinalzahlen, die sich bis zu Ω erstreckt, schließt alle Ordinalzahlen und damit alle logisch erdenklichen Stufen des Abzählens mit ein. Zumal alle logisch möglichen Ordinalzahlen bereits vor Ω in Erscheinung treten, ist Ω selbst keine wohldefinierte Ordinalzahl.

[101] NESTLE-ALAND: DAS NEUE TESTAMENT : Griechisch und Deutsch. Stuttgart, 1986[27]. Eigene Hervorhebung.

In andere Worte gefasst: Wenn die Leute über das absolut Unendliche sprechen, dann so, als sei es ein Subjekt, das durch keinerlei Grenzen eingeschränkt wird und von daher absolut genannt werden kann:

> Absoluta entziehen sich durch ihr Wesen einer vollständigen rationalen oder objektiven Erkenntnis. Ein Absolutes kann man nur erkennen, indem man sich als Subjekt darauf einlässt. Das einzige Subjekt (das Selbst) mit dem Absoluten zu identifizieren bedeutet, den Sinn für das eigene Subjektsein aufzugeben. Bevor man den Tempel betritt, muss man die Schuhe ausziehen.[102]

3.1.4 Transfinite Kardinal- und Ordinalzahlen

Es ist schwierig, die Zahl „Aleph-eins“ zu definieren. Gleichwohl kann man von ihr sagen, dass sie ein unendlicher Ordnungstyp ist, der wesensmäßig größer ist als ω und dies auf eine ganz andere Art und Weise als z.B. bei $\omega+\omega$. Gleichwohl hat die Kardinalität eine zentrale Bedeutung, denn: Zum einen weisen nicht alle unendlichen Mengen dieselbe Kardinalität auf, zum anderen zeichnen sich aber viele scheinbar unterschiedliche unendliche Mengen in der Tat durch genau dieselbe Kardinalität aus.[103] Zweifelsohne ist dabei ω aus dem Grund eine Kardinalzahl, da sie nicht umkehrbar eindeutig auf eine endliche Zahl abgebildet werden kann.[104] Unternimmt man nun den Versuch, $\aleph_1$ zu definieren, so zeigt sich, dass dem Begriff der „Mächtigkeit“, der „Kardinalität“, hier eine besonders tragende Bedeutung zukommt, insofern $\aleph_1$ nämlich die erste unendliche Kardinalzahl ist, die sich nicht umkehrbar auf ω abbilden lässt. Aus diesem Grund ist $\aleph_0$ nichts anderes als ω, denn ω ist die „nullte“ unendliche Kardinalzahl.

---

[102] RUCKER, Rudy: Die Ufer der Unendlichkeit : Analysen und Spekulationen über die mathematischen, physikalischen und wirklichen Ränder unseres Denkens. Frankfurt am Mai: Krüger, 1989, S 304f.

[103] Z.B. sind ω und $\omega\cdot 2$ völlig unterschiedliche Ordinalzahlen, doch besitzen sie beide dieselbe Kardinalität. Somit gilt, dass „die Kardinalität von ω gleich der Kardinalität von ω plus der Kardinalität von ω“ ist. Dies gilt aus dem Grund, weil eine Menge genau dann als abzählbar definiert wird, wenn ihre Kardinalität nicht größer als die von ω ist.

[104] ω ist demnach die „nullte“ Kardinalzahl, die nach „allen endlichen Zahlen“ kommt.

Zur Erinnerung: Die Kardinalzahl $\mathbb{N}$ wird üblicherweise mit $\aleph_0$ bezeichnet und es gilt die Gleichheit von $\aleph_0 = \omega$. Genaugenommen ist $\omega = \mathbb{N}$ und $\aleph_0 =$ der Kardinalzahl $\mathbb{N}$, denn ω ergibt sich aus den natürlichen Zahlen in ihrer natürlichen Anordnung, indem man nur auf ihre abstrakte Ordnung achtet, während man $\aleph_0$ erhält, wenn man bei den natürlichen Zahlen nur auf ihren Zahlcharakter achtet. Deshalb können $\mathbb{N}$, ω und $\aleph_0$ als gleichwertige Begriffe, wenn auch mit unterschiedlichen Bedeutungsnuancen, betrachtet werden.

Darauf aufbauend stellt sich heraus, dass ähnlich wie bei den Ordinalzahlen auch bei den Kardinalzahlen die Möglichkeit gegeben ist, fortwährend immer neue Zahlen zu eruieren. So lässt sich eine Folge von unendlichen Kardinalzahlen schreiben: Auf $\aleph_0$ folgen $\aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, ..., \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, ..., \aleph_{\omega^\omega}, ..., \aleph_{\aleph_1}, ..., \aleph_{\aleph_\omega}, ...$ und so weiter. Man kann an dieser Stelle schon erahnen, dass die Folge transfiniter Zahlen – Ordinalzahlen ebenso wie Kardinalzahlen – niemals zu einem Ende kommt. Es ist daher nicht weiter verwunderlich, dass eines der Ziele Cantors darin bestand, Rechenschaft für die Existenz der nicht-abzählbaren Ordinalzahl $\aleph_1$ abzulegen.

Um das „Sein" solcher Mengen wie $\aleph_1$ zu verteidigen, hat Cantor jene allem Anschein nach in Frage kommenden Perspektiven „einer direkten und einfachen Wahrnehmung der Realität solcher Mengen im geistigen Raum angenommen".[105] Diese Verteidigungsstrategie ist zugegebenermaßen sehr ansprechend, wenngleich nicht stichhaltig.

Eine Schwäche liegt in der Hürde, Mengen, die den transfiniten Alephs entsprechen, unmittelbar wahrzunehmen. Cantor kommt dieser zu erwartenden Kritik zuvor, indem er als Antwort darauf bereits sein Gegenargument einführt, dass in Wahrheit eine Zahl wie $\aleph_2$ überhaupt einfacher wahrzunehmen ist, als eine „zufällige natürliche Zahl mit zehn Millionen Stellen". Cantors Standpunkt ist im Laufe der Jahre immer solider geworden, zumal viele Leute – ohne jemals auf irgendwelche Widersprüche zu stoßen – mit „seinen" Alephs gearbeitet haben.

[105] RUCKER: Ufer, S 319.

3.2 Potenzmengen – Der Aufstieg zu höheren Mächtigkeiten

Während die beiden Operationen Addition und Multiplikation von Kardinalzahlen vergleichsweise harmlos sind, stellt der Übergang zu Exponenten eine echte Herausforderung dar. Seit nunmehr hundert Jahren beschäftigt die Mathematiker die Frage, wie denn der genauere Wert der einfachsten Potenz, in der eine nicht endliche Kardinalzahl vorkommt, bestimmt werden kann, wie z.B. im Falle von $2^{\aleph_0}$. Auch heute noch ist keine definitive Lösung in Sicht.

Ungeachtet dessen sind die Mathematiker heute zumindest – oder vielleicht auch nur höchstens – dazu im Stande, den Nachweis für die Existenz zweier verschiedener Ordnungen unendlicher Mengen zu erbringen, weshalb die nächstfolgende angemessene Frage ihr Augenmerk darauf richtet, in welcher Beziehung diese Kardinalzahlen mit den von Cantor konstruierten transfiniten Zahlen stehen. Konkret zielt die Frage darauf ab, ob man den Beweis erbringen kann, dass tatsächlich eine unendliche Folge von unendlichen Mengen einer unendlichen Hierarchie größer werdender Kardinalzahlen konstruiert werden kann, mit anderen Worten ob $\aleph_0$ und c die einzigen unendlichen Kardinalzahlen sind und es keine „realen Unendlichkeiten" jenseits der Mächtigkeit des Kontinuums existieren. Cantor selbst konnte diese Frage mit „Ja" beantworten und führte zu diesem Zweck die Begriffe der Teilmenge und jener der Potenzmenge ein, die eine zentrale Position einnehmen.

> Es gilt dabei, dass eine jede endliche oder unendliche Menge eine Potenzmenge besitzt. Cantor kann beweisen, dass selbst dann, wenn die Menge A unendlich ist, sich ihre Potenzmenge P(A) zu allen Zeiten durch eine höhere Kardinalzahl als A auszeichnet. Darüber hinaus erbringt er den Beweis, dass die Kardinalzahl von P(A) immer gleich 2^A ist.[106] Dieses Faktum stellt sich als wahr und unverzichtbar heraus und führt in gewisser Weise zu direkten Quantensprüngen von einer Zahlklasse zur nächsten wie z.B.:
>
> $$2^{\aleph_0} = \aleph_1,\ 2^{\aleph_1} = \aleph_2$$

[106] Streng genommen sollte dies „P(A) = $2^{\overline{A}}$" geschrieben werden, wobei „$\overline{A}$" für die Kardinalzahl von A steht.

> und so weiter. Für unsere Zwecke ist von Interesse, dass Cantor zwei Beweise für die Potenzmenge vorlegt. In beiden geht es ihm noch nicht um das 2^A-Problem: Er möchte hauptsächlich zeigen, dass auch für eine unendliche Menge A P(A) > A gilt.[107] Der erste Beweis zeigt, dass die Menge aller Teilmengen der Menge der ganzen Zahlen nicht abzählbar ist[108], obgleich die Menge der ganzen Zahlen abzählbar ist. Dies bedeutet offenbar, dass ihre Potenzmenge eine höhere Mächtigkeit aufweist als $\aleph_0$. Von daher soll Cantors Beweis zeigen, dass sich aus einer unendlichen Menge A eine unendliche Menge B konstruieren lässt, die mächtiger als A ist.

Dies lässt sich allgemein wie folgt erläutern: Georg Cantor konnte den Beweis erbringen, das für jede Kardinalzahl $\aleph$ gilt, dass ihre Potenzmenge größer ist als sie selbst, d.h. $\aleph < 2^{\aleph}$. Die wirkliche Schwierigkeit liegt nun aber darin, $\aleph \neq 2^{\aleph}$nachzuweisen. Hat man einmal bewiesen, dass $\aleph \leq 2^{\aleph}$ und $\aleph \neq 2^{\aleph}$ gilt, dann darf man auf $\aleph < 2^{\aleph}$ schließen. Demzufolge ist $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$, $\aleph_1 < 2^{\aleph_1}$ und so weiter. Im Fall der Kardinalzahl $\aleph$ gilt nun, dass $\aleph^+$ die erste Kardinalzahl größer $\aleph$ ist. Nun wissen wir Bescheid, dass $2^{\aleph}$ größer als $\aleph$ ist und dass $\aleph^+$ die kleinste Kardinalzahl größer als $\aleph$ ist. Daraus schließen wir, dass $\aleph^+ \leq 2^{\aleph}$ gilt.

In seiner Verallgemeinerten Kontinuumhypothese stellt Cantor die Vermutung auf, dass für $\aleph$ $2^{\aleph} = \aleph^+$ gilt, oder anders formuliert: Für alle a gilt, dass $2^{\aleph_a} = \aleph_{a+1}$. Nun können wir uns auf den als Cantorsche Kontinuumhypothese (KH) bekannten Sonderfall der verallgemeinerten Kontinuumhypothese konzentrieren.

[107] Dies ist sinnvoll, wenn man sich daran erinnert, dass der übergeordnete Kontext dieser Beweise Cantors Versuch ist, unendliche Mengen (Zahlklassen) abzuleiten, die mächtiger sind als c.

[108] Tatsächlich ist die Version von 1891 in Wirklichkeit ein Beweis dafür, dass diese Potenzmenge nicht zählbar ist. Aber erinnern wir uns daran, dass eine Menge zählbar ist, wenn sie entweder endlich oder abzählbar ist. Hier lässt sich leicht zeigen, dass die relevante Menge nicht endlich ist. Da die Menge aller ganzen Zahlen selbst unendlich ist, kann die Menge all ihrer Teilmengen also keinesfalls endlich sein. Die eigentliche Frage lautet, ob die Potenzmenge abzählbar ist.

3.3 Kontinuumhypothese

Die Frage, worum es in der Kontinuumhypothese[109] geht, kann auf verschiedene Weisen in Worte gefasst werden: „Ist c gleich $2^{\aleph_0}$?“; „Ist c = $\aleph_1$?“.

Um zunächst einen kurzen Einblick in dieses Problem zu gewinnen, betrachten wir einmal verschiedene Mengen mit der Kardinalität $2^{\aleph_0}$ – die Kardinalität der Potenzmenge von Omega.[110] Tatsächlich ist es so, dass man zu jeder beliebigen Menge A die Menge $P(A)$ aller Teilmengen von A bilden kann. Der springende Punkt hierbei ist die Tatsache, dass Cantor bereits selbst den Nachweis erbracht hat, dass es eine unendliche Hierarchie unendlicher Mengen und ihrer Potenzmengen gibt und dass $P(A) = 2^A$ und $2^A > A$ Theoreme für unendliche Mengen sind. Die Tatsache, dass $P(A)$ überabzählbar ist, bereitet gewiss Schwierigkeiten, eine Vorstellung von Potenzmengen zu gewinnen. Diese Erschwernisse sollen uns aber nicht daran hindern, die Existenz von Mengen wie $\aleph_1$ zu akzeptieren. Cantor hat allerdings nicht beweisen können, auf welche Weise diese verschiedenen Ergebnisse in Zusammenhang gebracht werden können. Die zentrale Frage, die man sich stellen muss, lautet, ob $2^A > A$ ein „unwiderrufliches“ Prinzip ist, das die Anordnung in der transfiniten Hierarchie bis in allen Einzelheiten definiert – das heißt:

> [O]b für eine beliebige Menge A die nächstgrößere Menge immer 2^A ist, ohne ∞ dazwischen – und mithin, ob man mit diesem Verfahren der „binären Potenzierung“ von einer unendlichen Menge zur nächsten kommt, so wie man bei der Addition von einer ganzen Zahl zu nächsten kommt. Ein Ja auf diese lange Frage ist die Kontinuumhypothese.[111]

Es ist eine wirklich hilfreiche Vorstellung, die Menge der reellen Zahlen mit der Menge aller Punkte auf der Zahlengerade zu identifizieren. Es ist allerdings noch nicht geklärt, ob die Vielheit der solcherart benannten Punkte in der Tat eine vollständige kontinuierliche Gerade bestimmt. Obgleich dieser Vorstellung mit mancherlei Schwierigkeiten einhergeht – die nicht näher behandelt werden – stellt man sich die Frage

[109] In Zukunft kann für den Begriff „Kontinuumhypothese“ die Abkürzung „KH“ verwendet werden.
[110] Als Beispiel hierfür dient z.B. die Menge aller Teilmengen der natürlichen Zahlen.
[111] WALLACE: Cantor, S 372.

nach der Kardinalität der reellen Zahlen, für die das Symbol „c“ eingeführt worden ist, im Vergleich zu jenen Mengen – wie z.B. die der natürlichen Mengen –, deren Kardinalität $\aleph_0$ ist – als Gerade vor.[112]

Diese Verwicklung, bekannt als Kontinuumproblem, hat ihre Ursache in der Entscheidung über die Position von c in der Hierarchie der Alephs. Die These, dass $c = \aleph_1$ ist, ist unter dem Namen „Cantorsche Kontinuumhypothese“ bekannt. Cantors Version der Hypothese war dabei spezifischer als die heute allgemein gültige Form der Kontinuumhypothese $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$ (für ein beliebiges n). Es ist bekannt, dass er für die Existenz und die Mächtigkeiten zweier verschiedener unendlicher Mengen den Beweis erbracht hat, dass die Mächtigkeit $\aleph_0$ für die Menge aller ganzen, rationalen und algebraischen Zahlen und die Mächtigkeit c für die Menge aller reellen, transzendentalen Zahlen und der stetigen Intervalle und Räume ist. Des Weiteren konnte er nachweisen, dass $c > \aleph_0$ ist und so lautete seine Version der Kontinuumhypothese $c = 2^{\aleph_0}$, also dass in der Tat $c = \aleph_1$ ist und sie damit die nächste unendliche Menge nach $\aleph_0$ ist.

Exkurs: Anfangs verfolgte Cantor eine andere Vorstellung, wonach die Kardinalität c der reellen Zahlengeraden $\aleph_1$ ist, die Menge aller Punkte der Ebene $\aleph_2$, die Menge aller Punkte des dreidimensionalen Raumes $\aleph_3$ und so weiter. Es erwies sich aber, dass alle diese Kontinua sich durch dieselbe Kardinalität c auszeichneten.

Cantor stieß in Zusammenhang mit seiner Arbeit an den Ordnungszahlen und Ordnungstypen auf die Kontinuumhypothese und die Problemen, die sie mit sich brachte. Bereits an einer früheren Stellewurde festgestellt, dass nicht nur ein Ordnungstyp für unendliche Mengen existiert, sondern de facto ist es so, dass es für unendliche Mengen unendlich verschiedene Ordnungstypen gibt. Cantor erbringt nun den Be-

[112] c wird oft als die „Kardinalzahl des Kontinuums“ bezeichnet, weil das Wort „Kontinuum“ für kontinuierliche Bereiche des mathematischen Raumes – wie beispielsweise Geraden, Flächen und Körper – üblich ist. 1883 veröffentlichte Cantor eine Bemerkung, dass er hoffe, bald über einen Beweis dafür zu verfügen, dass die Kardinalität des Kontinuums dieselbe sei wie diejenige der zweiten Zahlenklasse.

weis, dass für eine abzählbar unendliche Menge die Menge möglicher Ordnungstypen selbst nicht abzählbar ist.

Auch wenn wir auf die transfiniten Ordnungszahlen wie ω nicht näher eingehen, so können wir gewisse Ähnlichkeiten bzw. Relationen zwischen c und $\aleph_1$ finden, nämlich, dass die Menge der reellen Zahlen tatsächlich das Wesen des Kontinuums einfängt. Cantors ursprüngliche Kontinuumhypothese lautet, dass dann die Kardinalität dieser Menge mit c oder mit $\aleph_1$ bezeichnet werden kann und dass diese Kardinalität größer als $\aleph_0$ ist. Nun tritt die Frage auf, welches der Alephs gleich c ist, d.h. wenn überhaupt ein solches Aleph existiert. Ein oberflächlicher Beweggrund, weswegen man seine Zustimmung geben könnte, dass c gleich einem Aleph sein müsste, ist, dass $c = 2^{\aleph_0}$ gilt und man eine gewisse Ahnung hat, dass eine mit einer Kardinalität gebildete Potenz wieder eine Kardinalität hervorbringen soll. Aber gewiss ist $c = 2^{\aleph_0}$ nicht so definiert, dass es in konsequenter Weise auf irgendein Aleph hinführen würde. Die tatsächliche Schwierigkeit liegt darin, dass Cantor eine gewisse elementare Kausalität zwischen diesen Identitäten nicht beweisen kann. Cantors ursprüngliche Kontinuumhypothese lautet, dass $c = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ identisch sind, und dass zwischen $\aleph_0$ und c keine unendliche mittlere Größe liegt.

Später verzeichnet Cantor dann doch einen Erfolg indem er zwei wichtige Sachverhalte ableitete: Erstens ist c unter keinen Umständen größer als $2^{\aleph_0}$ und zweitens, dass, falls eine unendliche Menge größer als $\aleph_0$ existiert, diese aber kleiner als c sein muss und dass diese Menge nichtabzählbar ist. Cantors Ziel bestand darin, zu beweisen, dass keine Menge zwischen $\aleph_0$ und c liegt und folglich $c = \aleph_1$ gilt. Obgleich er jahrelang an seiner Kontinuumhypothese arbeitete, gelangt es ihm nicht, ihre Gültigkeit zu beweisen. Es ist tragisch, dass er gerade darin sein großes Scheitern sah, insbesondere zumal die Mathematiker heute genau wissen, weshalb Cantor die Kontinuumhypothese weder beweisen noch widerlegen konnte. Die Ursachen hierfür sind von entscheidender und absoluter Natur und greifen die formale Konsistenz der axiomatischen Mengenlehre geradezu an der Wurzel an, so wie Gödels Unvollständigkeitsbeweise einige Jahre später den formalen Systemen in der Mathematik „das Wasser abgruben“.

In Bezug auf die Kontinuumhypothese, die zu den folgenreichen Hürden der frühen Mengenlehre zählt, ist es von großer Wichtigkeit, zwischen zwei unterschiedlichen Fragen zu differenzieren. Dabei handelt es sich zum einen um die metaphysische Frage, ob die Kontinuumhypothese wahr oder falsch ist und zum anderen, ob die Kontinuumhypothese auf der Basis der Axiome der allgemein gültigen Mengentheorie bewiesen oder widerlegt werden kann:

> Diese beiden Fragen werden nur dann zu einer Frage, wenn entweder (1) die formale Mengenlehre die Realität von aktual ∞ Mengen und Mengen des Typs unendlich zutreffend abbildet/widerspiegelt oder (2) die formale Mengenlehre diese aktuale Realität ist, was bedeutet, dass die „Existenz“ einer gegebenen ∞ Menge ausschließlich eine Frage ihrer logischen Kompatibilität mit den Axiomen der Theorie ist. Bitte beachten Sie, dass dies genau jene Fragen nach dem metaphysischen Status abstrakter Entitäten sind, mit denen sich die Mathematik seit den alten Griechen herumschlägt.[113]

Eine definitive Antwort auf die zweite Fragestellung können K. Gödel und P. Cohen erst nach jahrzehntelanger Arbeit geben.

In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts erbringt Gödel den formalen Beweis, dass die allgemeine Form der Kontinuumhypothese, als ihr eigenes Axiom behandelt und zu den Axiomen der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre[114] beigefügt, konsistent ist und keinen Widerspruch erzeugt. Außerdem hat er den Beweis erbracht, dass man auf dieser Grundlage niemals $c \neq \aleph_1$ nachweisen kann. Hieraus kann man aber gewiss nicht die Schlussfolgerung ziehen, dass Cantor Recht hatte, sondern sie bezeugt lediglich, dass man seine These im Rahmen von ZFC nicht widerlegen kann.

Paul Cohen erbringt in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts den Beweis, dass die Negation der allgemeinen Kontinuumhypothese durch Hinzufügung der Axiome von ZFC keinen logischen Widerspruch mit sich zieht. Mit diesen grundlegenden Axiomen hat Cohen gezeigt, dass niemals $c = \aleph_1$ bewiesen werden kann. Das heißt aber

[113] WALLACE: Cantor, S 382.
[114] Diese ist unter der Bezeichnung ZFC bzw. ZFM geläufig.

nicht, dass Cantor Unrecht hatte, sondern nur, dass, basierend auf die Axiome von ZFC, niemals bewiesen werden kann, dass dieser Recht gehabt hat. Von daher kann keines der denkbar möglichen „Universa“ von Gödel und Cohen als das der Wahrheit entsprechende „Universum“ der Mengenlehre gelten, doch die Existenz dieser möglichen „Universa“ beweist, dass, solange man sich auf die Axiome von ZFC beschränkt, sowohl die Anerkennung der Kontinuumhypothese als auch die Negation in Frage kommt. Es sind im Laufe der Zeit immer wieder umfangreiche Hilfestellungen genannt worden, welche Axiome man ZFC beifügen kann, doch keines dieser Axiome konnte festlegen, welchen Wert c hat. Da bis heute keine Theoreme gefunden werden können, aus denen sich $c \neq \aleph_1$ herleiten lässt, kann es gut sein, dass man dereinst die Kontinuumhypothese als eine mathematische Wahrheit anerkennt.

Fügt man die beiden Ergebnisse von Gödel und Cohen zusammen, dann legen sie den Beweis für das vor, was gegenwärtig als die Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese genannt wird. Die Unabhängigkeit – auch als Unentscheidbarkeit bekannt – bezeugt, dass man die Kontinuumhypothese mit den geltenden Axiomen der Mengenlehre weder beweisen noch widerlegen kann. Von daher ist diese Problematik von großer Bedeutung, denn zum einen führt sie vor Augen, dass Gödel mit seinen Unvollständigkeitsergebnissen nicht bloß theoretische Optionen wiedergibt, sondern, dass es sich hier um wahre und bedeutsame mathematische Theoreme handelt, die nicht bewiesen werden können. Daraus resultiert, dass eine allgemeine, höchst abstrakte und vollkommen formale Mathematik es nicht vermag, grundsätzlich wahre mathematische Axiome darzulegen bzw. miteinzuschließen. In diesem Zusammenhang gelangt D.F. Wallace zu folgendem Fazit:

> Von dieser Zerstörung des Glaubens, dass 100 Prozent Abstraktion = 100 Prozent Wahrheit ist, hat sich die reine Mathematik noch immer nicht erholt – und es ist nicht einmal klar, was „Erholung“ hier bedeuten würde.[115]

Schlussendlich muss man sich an die elementarste Frage heranwagen, nämlich, in welcher Weise sich die Unbeweisbarkeit der Kontinuumhypothese auf die zweite

[115] WALLACE: Cantor, S 384.

große Frage auswirkt, also ob die Hypothese tatsächlich wahr ist. Es ist nicht weiter verwunderlich, dass eine beträchtliche Anzahl an verschiedenartigen Thesen diesbezüglich existieren. Formal gesehen ist einleuchtend, dass unterschiedliche Axiomatisierungen abweichende Stärken und Schwächen vorweisen und dass die Kontinuumhypothese in Hinsicht auf einige Fälle beweisbar bzw. widerlegbar und in anderen Fragen noch ungeklärt ist. Die Auswahl eines Systems hängt dann damit zusammen, welche Zielsetzung man eindeutig verfolgt.[116]

Die Unentscheidbarkeit der Kontinuumhypothese erregte vorwiegend Unmut bei den mathematischen Platonikern, die auch zeitweise unter den Namen Realisten, Cantorianer bzw. Transfiniten bezeichnet wurden. Dieser Sachverhalt ist insofern aufschlussreich, da gerade die beiden renommiertesten modernen Platoniker G. Cantor und K. Gödel gemeinsam die Verantwortung für einen Großteil der ganzen Misere tragen. In einem Kommentar fasst Gödel seinen und Cohens Beweis mit der Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese der platonischen Sichtweise bestens zusammen:

> Nur jemand, der (wie die Intuitionisten) behauptet, dass die Begriffe und Axiome der klassischen Mengentheorie keinerlei Bedeutung hätten, könnte mit einer solchen Lösung zufrieden sein, nicht dagegen jemand, der der Ansicht ist, dass sie einen wohlbestimmten Sachverhalt beschreiben. Denn tatsächlich muss Cantors Vermutung entweder wahr oder falsch sein, und der Umstand, dass sie auf der Grundlage der Axiome, so wie wir sie heute kennen, unentscheidbar ist, kann nur bedeuten, dass diese Axiome keine vollständige Beschreibung der Realität enthalten.[117]

In Wirklichkeit sehen die Platoniker in dem Bemühen, die Kontinuumhypothese zu beweisen, die Notwendigkeit bessere Grundaxiome in der Mengenlehre als jene, die

[116] Hilbert merkt hierzu an, dass die Antwort „wahr" in diesem Bezug lediglich den Stellenwert „beweisbar in ZFC" meint und dass die logische Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese von ZFC besagt, dass sie weder als wahr noch als falsch eingestuft werden kann.

[117] Wallace, S 387. Abgeänderte Fassung. Aus: Gödel, Kurt: Essay : „What is Cantor's Continuum Problem?", in Benacerat und Putman: Philosophy of Mathematics, S. 258-273.

im klassischen ZFC einbegriffen sind, zu finden oder zumindest um einige Postulate zu bereichern, die allerdings mit den klassischen Axiomen konsistent sein müssen.

Gödel und Cantor hinterließen durch ihre Arbeiten ein großes Vermächtnis: „eine Welt, die keinen endlichen Umfang hat“ – „ein Welt, die sich heute in einer neuen Art von formaler Leere dreht“.[118]

4 Resümee

4.1 Umstrittener Formalismus

Der eigentliche Grund, weshalb wir uns mit dem Potenzbeweis Cantors beschäftigt haben, ist das abgründige Gebiet der Selbstbezüglichkeit.

> Exkurs: Cantor zufolge enthält die Menge aller Teilmengen der Menge A immer mehr Elemente als A selbst. Angenommen A ist definiert als „die Menge aller Mengen“, dann beinhaltet dieses A per Definition all seine Teilmengen, da diese ebenfalls Mengen sind, sodass unter keinen Umständen P(A) > A gilt. Die Quintessenz zeigt sich nun darin, dass genau dieses von Cantor verwendete Prinzip der „Menge der Mengen“, um eine Hierarchie unendlicher Mengen aufzubauen, direkt ein Paradoxon ergibt.
>
> Nun ist es einmal so, dass einige Mengen sich selbst als Element enthalten und einige nicht. De facto enthalten sich die meisten Mengen nicht selbst als Element. Einige Mengen enthalten sich jedoch selbst als Element, zum Beispiel die Menge aller Mengen. Ein Paradoxon dieser Art, wie der „$(a \notin \emptyset) \rightarrow (a \in \emptyset)$-Zertrümmerer“ in Cantors Widerspruchsbeweis, wird offiziell Zirkelschluss genannt, wobei der Terminus Zirkel an dieser Stelle darauf hinzielt, dass ein logisch zwingender Schluss logisch unmöglich wird. In der Cantorschen Antinomie können wir nicht entscheiden, ob etwas ein Element einer Menge ist oder nicht.
>
> In diesem Zusammenhang ist es interessant zu wissen, dass Kurt Gödel einen vergleichbaren Kunstgriff wie Cantor „$(a \notin \emptyset) \rightarrow (a \in \emptyset)$“ anwenden wird, um seine vernichtenden Unvollständigkeitssätze zu beweisen, indem er aufzeigt, dass gewisse wohlgeformte mathematische Thesen zugleich wahr und unbeweisbar sind.

[118] WALLACE: Cantor, S 388.

Cantor hatte nachweisbar Kenntnis von diesem Problem der Selbstbezüglichkeit oder besser gesagt von dem Paradoxon der Mengen aller Mengen[119], obwohl er in seinen veröffentlichten Arbeiten nie ein Wort darüber verlor. Infolgedessen gab es – und gibt es bis heute – verschiedenste mathematische Bestrebungen, spezifische Regeln zur Eliminierung von Paradoxien zu definieren, da diese Teil einer viel umfassenderen und tiefgreifenderen Krise sind. Jene Widersprüchlichkeiten waren zwar bereits vor Cantor publik, doch durch seine Theorien über das Unendliche kam es zum endgültigen Ausbruch dieser Krise. Die Antinomie der Mengenlehre verbunden mit den Grundlegungsproblemen führte unausweichlich zu den großen Kontroversen zwischen Formalisten und Intuitionisten. Während der Intuitionismus in puncto unendliche Mengen ein blindwütiger Widersacher Cantors ist, stehen die Formalisten treu an seiner Seite, obgleich beide Richtungen im Gegensatz zu Cantor antiplatonisch ausgerichtet ist. Der Formalismus ist dabei eine völlig autonome Denkschule, die die Abstraktheit der Mathematik zum alleinigen, allgemeingültigen Maßstab bestimmt. Die Paradoxien der Mengenlehre sind hierbei Teil des umfassenden Problems der Widerspruchsfreiheit der Mathematik. Aus diesem Grund versucht Hilbert[120], die Mathematik in der Weise neu aufzubauen, als in ihr Theoreme keine Antinomien mehr hervorbringen. Der Formalismus steuert unter anderem darauf ab, die Mathematik vollkommen von der „empirischen Wirklichkeit“ abzutrennen, indem er gewisse Symbole nach bestimmten Regeln handhabt und man Zeichenfolgen aus anderen Zeichenfolgen konstruieren kann:

> Was die Zeichen […] bedeuten oder ob sie überhaupt eine Bedeutung haben, ist irrelevant; und die Aussage, dass eine mathematische Entität „existiert“, bedeutet nichts anderes, als dass sie keinen logischen Widerspruch verursacht.[121]

Das Ziel des Formalismus zeigt sich in seinem Bestreben, die Mathematik in ihrer Gesamtheit durch eine Reihe von Axiomen und Schlussregeln zu errichten, auf welche die gesamte Mathematik zurückgeführt werden kann, sodass das gesamte Sys-

---

[119] Wir wissen unter anderem, dass er D. Hilbert davon erzählte, und es wird in mindestens einen der Briefe Cantors an Dedekind erwähnt.
[120] David Hilbert (*1862; †1943) war einer der bedeutendsten Mathematiker der Neuzeit.
[121] WALLACE: Cantor, S 359f.

tem vollkommen deduktiv, streng und „rein“ ist und damit in sich geschlossen. Der Formalismus scheiterte allerdings bereits daran, dass er noch nicht einmal die an sich selbst gestellten Anforderungen zur eigenen Zufriedenheit erfüllen konnte.

Für Cantor ist es hingegen von besonderer Wichtigkeit, die Mathematik in ein metaphysisches System zu integrieren, doch gerade durch seine eigenen bahnbrechenden Forschungen wurde ein Grundzug seiner eigenen Weltanschauung in Frage gestellt. Hilbert zufolge geht es in der modernen Mathematik nicht mehr um die für Cantor so wichtige Wahrheit, sondern um die Gewährleistung jener Sicherheit, sodass in einer mathematischen Theorie niemals die Aussage A und ihre Negation zugleich gelten bzw. abgeleitet werden können. Im Gegensatz dazu geht es bei Cantor „immer wieder um das ‚Seiende‘, um Hilfsdienste für eine als Ontologie verstandene Metaphysik, die womöglich noch Hilfswissenschaft einer Theologie sein kann.“[122] Diese neue Wendung im Denken der Mathematiker war Resultat beharrlicher intellektueller Redlichkeit und der modernen Grundlagenforschung. Das bedeutet nicht, dass jede metaphysische Fragestellung a priori ohne Sinn ist, denn Probleme dieser Art können weder durch Praktiken exakter Forschungen, noch durch „gemischt mathematisch-metaphysische“ Beweisführungen entschlüsselt werden. Trotz alledem hielt Cantor Zeit seines Leben an jedem „Quentchen Metaphysik“ fest und hätte mit hoher Wahrscheinlichkeit bestimmt keinen Gefallen an der „Auflösung“ seiner Fragestellungen durch die moderne Grundlagenforschung gehabt. Dennoch stellen seine Untersuchungen der Antinomien und der offenen Fragen der Mengenlehre nach wie vor für die folgenden Generationen von Mathematikern eine enorme Herausforderung für deren weiterführenden Forschungen dar. Und so war es nur eine Frage der Zeit, bis sich die Cantorschen Begriffsbildungen innerhalb der Mathematik durchgesetzt und bewährt haben und die Mengenlehre mit Hilfe eines formal-axiomatischen Verfahrens fundiert werden konnte.[123]

[122] MESCHKOWSKI: Probleme, S 154. Es gab keinerlei Anhaltspunkte dafür, dass Cantor selbst jemals die Möglichkeit der Nichtbeweisbarkeit und der Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese in Erwägung gezogen hat. Offenbar lagen ihm formalistische Untersuchungen völlig fern. Er war ja sogar davon überzeugt, dass den Mächtigkeiten $\aleph_0$ und $\aleph$ Realitäten in der physikalischen Welt entsprachen.

[123] Es waren Zermelo und Russell, welche die ersten Versuche der Axiomatisierung unternahmen.

4.2 Das Erbe Cantors

Cantor erhoffte sich nicht nur eine Würdigung seiner Arbeiten innerhalb der Mathematik, sondern auch durch die Theologie, von der er erwartete, dass seine Lehre

> [...] insbesondere von derjenigen Theologie bestätigt werden wird, welche auf die heilige Schrift, Tradition und auf die natürliche Veranlassung des menschlichen Geschlechts sich gründet, welche drei in notwendiger Harmonie zueinander stehen.[124]

Aus diesem Grund wäre es für Cantor eine große Genugtuung gewesen, dass seine Theorien zum Fundament der gesamten modernen Mathematik geworden sind, selbst wenn er mit der Denkweise der zeitgenössischen Mathematiker keinesfalls übereingestimmt hätte. Während in der modernen formalistischen Mathematik die „Existenz“ irgendeiner Menge bedeutet, dass sie durch eines oder mehrere Axiome gesichert ist, erhält dieses Wort noch mehr an Gewicht. Dass das formalistische Denken Cantor ganz und gar zuwider war, kann in einem seiner Briefe nachgelesen werden:

> Zum Verständnis der Lehre vom Transfiniten bedarf es keiner gelehrten Vorbereitung in der neueren Mathematik; sie kann für diesen Zweck eher schädlich als nützlich sein […].[125]

Cantor glaubte bekanntlich daran, dass seine Mengen mit der Mächtigkeit $\aleph_0$, der Mächtigkeit des Kontinuums und jene der Mächtigkeit $2^{\aleph}$ in Form einer „Realexistenz“ und nicht nur im Reich der Ideen existieren. Aber gerade dieser Glaube wird von den modernen Wissenschaften nicht geteilt. Wenn also die moderne Mathematik formalistisch aufgebaut ist, dann lässt sie die schwierige Frage aus, „was denn die Mathematik noch mehr sein kann als nur die Wissenschaft von den formalen Systemen.“ Diese Vorgehensweise hat den Vorzug, dass es keine Meinungsverschiedenheiten innerhalb des abgesteckten Systems der Mathematik gibt.

---

[124] MESCHKOWSKI: Probleme, S 216.
[125] MESCHKOWSKI: Probleme, S 216.

Vielleicht wäre es endlich an der Zeit, dass man den Grundlagenstreit beendet, um all den tiefgreifenden Errungenschaften, die bislang von Mathematikern geleistet worden sind, auch in Zukunft eine Heimat in der Mathematik zu geben.

Es war ein großes Anliegen Cantors, die Mathematik einzubauen „in eine Weltsicht, die über die exakten Wissenschaften und die Philosophie hinaus bis zur Theologie reichte."[126] Dennoch zeigt sich hinsichtlich seines Anliegens ein Hauch von Zweifel, denn seine Begriffsbildungen ermöglichen zwar eine „sauberen" Theorie des Transfiniten, doch gleichzeitig lassen sie die Grenzen in der Anwendbarkeit mathematischer Methoden erkennen. Sein Vorgehen hat somit nicht unbedingt eine sich wissenschaftlich gebende „Metaphysik" begünstigt, sondern die Erkenntniskritik. Entgegen einer solchen Kritik über seine Vorgehensweise lag für Cantor die Religiosität des modernen Menschen mehr am Herzen als das fragwürdige Bemühen eines „rationalen Theismus".

> In der Existenz des für uns Undurchdringlichen sah Einstein den Grund für seine [Cantors; Anm.: EL] Religiosität: „Das Wissen um die Existenz des für uns Undurchdringlichen, der Manifestation tiefster Vernunft und leuchtendster Schönheit, die unserer Vernunft nur in ihren primitivsten Formen zugänglich sind, dies Wissen und Fühlen macht wahre Religiosität aus.[127]

Eben daher wird durch die Theorien Cantors offenbar, dass – obgleich er uns bis an die Grenze des „Undurchdringlichen geführt hat – der menschliche Geist fähig ist, Strukturen zu erfassen, für die es in der Natur keine Vorbilder gibt. Und so gelangen wir zu der notwendigen und hinreichenden „Erleuchtung", dass Cantors „Paradies" scheinbar nicht von dieser Welt ist.

Die Arbeiten des deutschen Mathematikers Kurt Gödel – seine Unvollständigkeitsbeweise – verweigern einen längeren Aufenthalt in Cantors Paradies. Gödel zeigt auf, dass jedes System „Lücken" hat, d.h. wahre Sätze beinhaltet, die weder mit den vorhandenen noch mit hinzugefügten Axiomen bewiesen werden können.

---

[126] MESCHKOWSKI: Probleme, S 225.
[127] MESCHKOWSKI: Probleme, S 225.

III KURT GÖDEL UND DIE UNVOLLSTÄNDIGKEIT FORMALER AXIOMENSYSTEME

1 Gödels Unvollständigkeitsbeweise

Durch die Forschungen von Kurt Gödel steht die Mathematik vor einer neuen und – wie sie sehen wird – heute noch unlösbaren Herausforderung, nämlich vor dem Problem der „Unentscheidbarkeit“, die sich in der axiomatischen Methode der Mathematik niederschlägt. Das mathematische System beruht hier auf Axiomen, die nicht bewiesen und dennoch als wahr eingestuft werden.

Gödel erwähnte diesen Sachverhalt auf einer Konferenz für Erkenntnislehre der exakten Wissenschaften 1930. Erst am dritten und letzten Tag der Konferenz verkündet er, dass es wahre arithmetische Sätze gäbe, die jedoch unbeweisbar sind:

> Man kann (unter Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit der klassischen Mathematik) sogar Beispiele für Sätze (…) angeben, die zwar inhaltlich richtig, aber im formalen System der klassischen Mathematik unbeweisbar sind.[128]

Doch Gödel wurde enttäuscht. Die Fachwelt zeigte so gut wie keine Reaktion auf seine Entdeckung.

1.1 Gödels Beweise

In seiner Arbeit wagt sich Gödel an ein Kernproblem der Mathematik heran, nämlich die Tatsache, dass die Mathematik in den verschiedenen ihr zugehörigen Teilbereichen zum einen als eine deduktive und zum anderen als eine axiomatische Disziplin auftritt. Bei der Anwendung der axiomatischen Methode können bestimmte Sätze ohne Beweis als Axiome oder Postulate bejaht werden, aus denen dann alle weiteren Sätze des Systems als Theoreme abgeleitet werden können. Die Axiome treten als das „Fundament“ des Systems auf. Aus diesen Axiomen werden daran anschlie-

[128] GÖDEL, Kurt: Diskussion zur Grundlegung der Mathematik. In: Solomon Feferman u.a. (Hg.), Kurt Gödel – Collected Works, Vol I, Publications 1929 – 1936, New York: Oxford University Press, 1986, S 202.

ßend ausnahmslos mit Unterstützung logischer Grundsätze die Theoreme als „Überbau“ des Systems erworben.

Obgleich Gödels Beweis im engeren mathematischen Sinn äußerst kompliziert zu verstehen ist, so lässt sich erfreulicherweise die Grundstrategie ohne schwerwiegende Komplikationen nachvollziehen, wenngleich der Beweis in seiner Einzigartigkeit ungewöhnlich – in seiner Ungewöhnlichkeit einzigartig ist.

Zu Beginn seines Beweises konstruiert Gödel ein formales System, welches sich aus einem Alphabet von Zeichen und Regeln – über die Verknüpfung dieser Zeichen zu wohlgeformten Formeln – zusammensetzt und entweder Axiome oder logische Schlusssätze aus Axiomen sind. Gödel belegt nachweislich, „daß es *wahre* arithmetische Sätze gibt, die nicht *beweisbar* sind.“[129] Die Tatsache alleine, dass er die Struktur selbstbezüglicher Paradoxien, durch welche unser eigener Verstand oft gegen eine „unsichtbare“ Mauer prallt, übernimmt und sie für seine Vorhaben umformt, ist schon selbst herausragend.

Gödel demonstriert in seiner Arbeit die Unhaltbarkeit der These, wonach die Chance existiert, für einen jeden mathematischen Zweig ein Axiomensystem abzuleiten, das aus einer unbegrenzten Gesamtheit wahrer Satzaussagen des jeweiligen Gebietes besteht. Folglich erschließt sich aus diesem unmöglich, die logische Widerspruchsfreiheit für eine sehr große Klasse deduktiver Systeme, wie z.B. die der elementaren Arithmetik, unter Beweis zu stellen. Daraus kann man schließen, dass für eine beträchtliche Anzahl wesentlicher mathematischer Fachbereiche Erkennen, dass ein Versuch einer vollständigen Axiomatisierung der gewöhnlichen Arithmetik der ganzen Zahlen aussichtslos ist, da der axiomatischen Methode wesenhaft gewisse nicht überschreitbare Grenzen gesetzt sind. Daher ist es Gödel zufolge in der Forschung eine vollständige Freiheit von inneren Widersprüchen mit absoluter Sicherheit nicht mit Gewähr geboten werden kann. Dieses Resultat ist von weitreichender theoretischer Bedeutsamkeit, weist es doch ausdrücklich auf die Möglichkeit hin, einen „Beweis für die *Unmöglichkeit eines Beweises* bestimmter Aussagen innerhalb eines gegebenen Systems zu liefern.“[130] Der menschliche Geist ist durch eine streng erhöhte Formalisierung der Mathematik nun fähig, neue Axiomensysteme aufzubauen,

[129] GOLDSTEIN, Rebecca: Kurt Gödel. Jahrhundertmathematiker und großer Entdecker. Piper Verlag GmbH, München 2006, S 167.
[130] NAGEL, Ernest; NEWMAN, James R.: Der Gödelsche Beweis. [Dt. Übers.: Hubert Schleichert] Wien, München: Oldenbourg, 1979², S 16.

in denen die Sinngehalte bestimmter Ausdrücke zunehmend unbestimmter werden, ihre Verwendung dadurch immer weitreichender wird und die aus ihnen ableitbaren Folgerungen weniger beschränkt werden. Eine große Herausforderung, die in der fortschreitenden Abstraktheit der Mathematik zu Tage trat, zeigte sich in der Frage,

> ob gegebene Postulate, die als Grundlage eines Systems dienen, miteinander verträglich sind, so dass aus ihnen nicht einander widersprechende Theoreme deduziert werden können."[131]

Um aber Gödels Leistung wirklich zu verstehen, müssen wir einen kurzen Abstecher zu Hilbert und seinen „absoluten Beweisen der Widerspruchsfreiheit" vornehmen.

Hilbert schlägt einen alternativen Weg vor, durch den die Widerspruchsfreiheit eines Systems vorgeführt werden kann und zwar ohne der Bedingung, dass dieselbe von einem anderen System her vorausgesetzt werden muss. Der erste Schritt in Richtung einer Konstruktion eines absoluten Beweises besteht in der „vollständigen Formalisierung" eines deduktiven Systems, die eine vollständige Entleerung der Bedeutungen der im System enthaltenen Begriffsformulierungen nach sich zieht, die nun einfache leere Zeichen „verkörpern". Die Kombination dieser Zeichen und die Art und Weise, wie man mit ihnen verfährt, wird durch exakt formulierte Regeln vorgegeben. Sinn und Zweck dieser Verfahrensweise ist „die Aufstellung eines Systems von Zeichen (genannt ein „Kalkül"), in dem uns nichts verborgen ist, und das nur dasjenige enthält, was wir ausdrücklich hineingebracht haben."[132] Des Weiteren versteht man unter dem Begriff „Kette" (bzw. unter endlich langen Folgen) die Postulate und Theoreme eines vollständig formalisierten Systems, bei dem die logischen Beziehungen zwischen mathematischen Aussagen unverhüllt vorliegen. So können die Formgesetze verschiedener „Ketten" von „sinnlosen" Zeichen, die Zusammenhänge und Kombinationen zwischen ihnen erfasst werden. Die Schlussfolgerung, dass derartige Sätze einen Sinn in sich tragen und wichtige Informationen beinhalten, kann ohne größere Probleme nachvollzogen werden, wobei ein wohlbestimmter Satz über ein sinnloses (formalisiertes) System verständlicherweise nicht zum System zugehören kann. Diese Sätze sind Hilbert zufolge ein Teil von dem, was er die „Metamathema-

[131] NAGEL; NEWMAN: Beweis, S 20.
[132] NAGEL; NEWMAN: Beweis, S 31.

tik“ nennt und zwar hinsichtlich jener Sprache, in der wir über die Mathematik sprechen können. Ihre Aussagen beziehen sich dabei auf die in einem formalisierten mathematischen System auftretenden Zeichen. Deren Art und Anordnung können zu längeren Ketten – auch Formeln genannt – kombiniert werden oder von den Relationen zwischen den Formeln, die sich durch die geltenden Regeln ergeben können. Als eine beeindruckende Ausnahmeerscheinung sind hier Gödels Sätze anzuführen, die sich gleichermaßen als mathematisch wie auch als metamathematisch zu erkennen geben. Sie berufen sich auf genau jene besonderen Qualitäten, nämlich die der Gewissheit, der Endgültigkeit und der Apriorität, die die mathematische Disziplin von jeher auszeichnet, denn diese Qualitäten verfügen über die Autorität einer apriorisch bewiesenen Wahrheit und lassen zudem Rückschlüsse zu, die über den Bereich der Mathematik hinausweisen, indem sie uns mathematische Erkenntnis über die Natur mathematischer Wahrheiten eröffnen.

Für Gödel war die richtige Interpretation der Mathematik von zentraler Bedeutung und zwar in der Beziehung, ob sein Fachgebiet

> [...] die objektive Wirklichkeit beschreiben – die unabhängig von unserem Denken existiert – oder ob es sich nur um subjektive Projektionen, gesellschaftlich anerkannte Gedankengebäude handelt.“[133]

Bei der Betrachtung der Welt lässt sich Gödel von einem höchst interessanten Axiom leiten und zwar, „daß nichts, was in der Welt geschieht, auf Zufall oder Dummheit zurückzuführen sei.“[134] Gödels Erkenntnisse geben Anlass für noch viel weitreichendere Diskussionen, berücksichtigt man, dass der Mensch selbst in der exaktesten Wissenschaft der Begrenztheit seines Verstandes, seiner Vernunft nicht entrinnen kann und somit jedes vom Menschen konstruierte mathematische System auf Grund der Existenz unlösbarer Probleme notwendig unvollständig sein muss.

Die Verschiedenartigkeit zwischen der Mathematik und der Metamathematik kann daher gar nicht hoch genug angesetzt werden. Die Verleugnung führt zu Paradoxien und Sprachlosigkeit – das bewusste Wahrnehmen ermöglicht eine genaue Erfassung

[133] GOLDSTEIN: Gödel, S 29.
[134] GOLDSTEIN: Gödel, S 29.

und Darstellung der logischen Struktur mathematischer Argumentationen. Hilbert sah hierin einen Handlungsbedarf. Sein Versuch basiert auf einem „absoluten“ Beweis der Widerspruchsfreiheit – der nur ein Minimum an Ableitungsregeln bedarf und keine Widerspruchsfreiheit eines anderen System voraussetzt – und der Trennung zwischen einem formalen Kalkül und dessen Beschreibung.

1.2 Der erste Unvollständigkeitsbeweis

Mathematische Beweise starten immer von einem bestimmten Punkt aus, wobei sie aus einer Schlussfolgerung eines anderen Beweises entstammen können. Gleichzeitig werden wir damit konfrontiert, dass man nicht alles in der Mathematik beweisen kann, denn andernfalls könnten wir sonst nirgendwo ansetzen. Aus diesem Grund zeigt sich die Notwendigkeit, bei gewissen „Grundgegebenheiten“ anzusetzen, auch wenn man sich damit auf unsicheren Boden begibt.

Mathematische Beweise weisen oft selbst schwere Mängel auf, indem sie sich auf Ableitungsregeln beziehen, die nicht explizit in Worte gefasst wurden bzw. werden können. Tatsache ist, dass die traditionelle Logik ihrem Wesen nach unvollständig ist. Whitehead und Russell versuchten in ihren *Principia Mathematica* 1910 zu zeigen, dass sich

> [...] alle *arithmetischen Begriffe* mit rein logischen Mitteln definieren lassen, und daß man alle arithmetischen Axiome aus einer kleinen Zahl grundlegender Aussagen deduzieren kann, die als logische Wahrheiten gelten dürfen.“[135]

> Exkurs: Man findet die Vorstellung vor, dass alle wahren Sätze innerhalb eines Axiomensystems eines ausgewählten Teilgebietes der Mathematik systematisch als Axiome, Schlussregeln und Theoreme klassifiziert werden können. Dabei verhält es sich so, dass die Axiome als die intuitiv überzeugenden Grundwahrheiten definiert werden, die keiner weiteren Beweise bedürfen. Mit Hilfe der wahrheitserhaltenden

[135] NAGEL; NEWMAN: Beweis, S 46.

Schlussregeln[136] kommen weitere, nicht unbedingt einleuchtende, wahre Sätze – genannt Theoreme bzw. Lehrsätze – hinzu, die sich aus den gegebenen Axiomen deduzieren lassen.

Ein Axiomensystem soll dabei ein Maximum an Gewissheit insofern vermitteln, als es sich auf ein Minimum an Axiomen beruft und „unnötige" Axiome und Intuitionen eliminiert. Die wenigen verbleibenden Axiome sind dann von grundlegender Bedeutung, denn diese bilden den Ausgang eines jeden Beweises. Durch die Eliminierung der Intuitionen gelangt man schließlich zu dem Begriff des „formalen Systems" bzw. des Axiomensystem, das vollends ohne Bezugnahme auf Intuitionen auskommt.

Indem die *Principia Mathematica* das Problem der Widerspruchsfreiheit mathematischer Systemen, vor allem der Arithmetik, auf jenes der formalen Logik reduziert, scheint sie einen Weg zur Lösung freizugeben. Doch dem ist nicht so, denn die Reduktion selbst liefert letztendlich doch keine abschließende Antwort für das Problem der Widerspruchsfreiheit, das sich auch noch in einer weitaus allgemeineren Form zeigt. Nichtsdestoweniger stellen die *Principia* das Hauptwerkzeug für die Untersuchung des Gesamtsystems der Arithmetik als ein uninterpretiertes Kalkül[137] zur Verfügung, da sie zwei Kriterien von immensem Wert erfasst. Zum einen liefern die *Principia* ein sehr umfassendes Zeichensystem für die Kodifizierung aller Sätze der reinen Mathematik und zum anderen gibt sie die in den mathematischen Beweisen angewandten Ableitungsregeln in allen Einzelheiten an.

1.3 Gödelnummerierung – Die Zuordnung einer Gödelzahl

Gödels nächster Schritt war die Suche nach einer mechanischen Methode zur Zuweisung jeder Aussage des Systems zu einer eindeutig bestimmten Zahl. Damit erreicht er, dass arithmetische Sätze zugleich metamathematische Aussagen von sich freigeben, wobei jeder einzelne Schritt entsprechend einer konsequenten, regelgebundenen Logik durchgeführt wird.

---

[136] Diese Schlussregeln sind perfekte Gesetze der „Wahrheitsvererbung". Die Wahrheit, die den Vorfahren – den Axiomen – zukommt, wird notwendigerweise an die Nachfahren (die Theoreme) weitergereicht.

[137] Unter dem Begriff Kalkül versteht man hier ein aus sinnlosen Zeichen bestehendes System, dessen Formeln bzw. Ketten nach fest bestimmten Umformungsregeln kombiniert und umgeformt werden.

Die Grundidee der Gödelnummerierung liegt also darin, zu zeigen, dass jedem Basiszeichen, jeder Formel und jedem Beweis eine eindeutige Zahl zugeordnet werden kann. Dahinter steckt im Wesentlichen die einfache Idee der Codierung, die es ermöglicht, dass zwischen den ursprünglichen Sätzen und dem Code hin und hergewechselt werden kann, wobei sichergestellt werden muss, dass nicht dieselbe Gödelzahl verschiedenen „Zeichen" zugeordnet wird.

Gödels Codierungssystem beruht dabei auf dem Satz von der Primfaktorenzerlegung, der gewährleistet, dass ein Algorithmus besteht, sodass man von einer beliebigen wohlgeformten Formel zu einer Gödelzahl und umgekehrt gelangen kann. Oder einfacher: Zur Absicherung stellen uns die Codierungsregeln einen Algorithmus zur Verfügungen, der bei jedem Schritt den nächsten bereits ankündigt, oftmals auf der Grundlage des vorangehenden Ergebnisses.

Zusammenfassend kann man sagen, dass uns Gödel eine gelungene Methode zur vollständigen „Arithmetisierung" eines formalen Kalküls vermacht hat, die eine Reihe von Anweisungen enthält, um eine eindeutige Zuordnung zwischen den Bezeichnungen im Kalkül und einer bestimmten Teilklasse der Klasse der ganzen Zahlen zu erlangen. Sobald dieses Ziel erreicht ist und man einen Ausdruck „gefunden" hat, kann zum einen die ihm zugeordnete Gödelzahl exakt ermittelt werden und zum anderen gilt, dass, wenn der Fall vorliegt und uns eine Zahl gegeben ist, sich der Begriff, den sie repräsentiert, bis ins Kleinste darlegen oder „wiederherstellen" lässt.

1.4 Kernstück des Beweises

Anhand von *Der Gödelsche Beweis* von Nagel und Newman möchte ich nun versuchen, den ersten Gödelschen Beweis nachzuzeichnen.

Vorab muss man sich daran erinnern, dass die von Gödel konstruierte Formel *G* Teil des arithmetischen Kalküls ist und ihr folglich eine Gödelzahl zugeordnet wird. Sie stellt das Abbild des metamathematischen Satzes dar, dass die Formel *G* mit ihrer zugehörigen Gödelzahl nicht beweisbar ist. Die arithmetische Formel *G* trifft für sich selbst dann die metamathematische Aussage: „Die Formel *G* ist nicht beweisbar." Aber kann denn das, was hier behauptet wird, überhaupt wahr sein?

Gödel weist der Formel *G* eine bestimmte Zahl h zu, wobei *G* in der Art und Weise angelegt ist, dass es dem Satz „Die Formel, der die Zahl h zugeordnet ist, ist nicht beweisbar“ gleichkommt. Die Beweisführung für die „Unentscheidbarkeit“ der formalen Wahrheit von *G* ist relativ „leicht“ indem in ihr vorgeführt wird, dass, „*wenn* die Formel *G* beweisbar wäre, auch die dazu kontradiktorische Formel (…) beweisbar wäre; und umgekehrt, *wenn* das formale Gegenteil von *G* beweisbar wäre, dann wäre auch *G* selbst beweisbar.“[138] Damit liegt dann aber der Fall vor, dass der arithmetische Kalkül widersprüchlich ist, denn wenn sowohl eine Formel als auch ihre Negation *(¬G)* formal beweisbar sind, dann widerspricht das hier vorliegende formale System der Arithmetik selbst. Demnach gilt, dass wenn der Kalkül widerspruchsfrei ist, die formalen Ableitungen aus den arithmetischen Axiomen weder für *G* noch für *¬G* möglich ist. Im Falle einer widerspruchsfreien Arithmetik ist *G* demnach eine notwendig formal unentscheidbare Formel.

Auf den ersten Blick scheint diese Erkenntnis nicht weltbewegend zu sein, denn worin soll schon die Außergewöhnlichkeit liegen, dass in der Arithmetik eine formal unentscheidbare Formel entwickelt werden kann? Das Besondere liegt vielmehr in der genauen Betrachtung der weitreichenden Folgen, die dieses Resultat mit sich bringt.

Obgleich die Formel *G* nicht entscheidbar ist, zeigt Gödel, dass er – unter der Voraussetzung, dass die Axiome des Systems widerspruchsfrei sind – allein durch metamathematische Überlegungen zeigen kann, dass *G* eine wahre arithmetische Formel ist und zwar in dem Sinne, dass sie die Behauptung aufstellt, „jede ganze Zahl besitze eine bestimmte arithmetische Eigenschaft, die exakt definiert werden kann und die jede beliebige untersuchte ganze Zahl aufweist“.[139]

Und so sind wir nun mit der formalen Unentscheidbarkeit der wahren Formel G konfrontiert. Um die Wahrheit dieser formal unentscheidbaren Formel *G* nachzuweisen, wird zu Beginn einmal unter der These der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik die metamathematische Aussage „Die Formel *G* ist nicht beweisbar“ als wahr nachgewiesen. Im zweiten Schritt wird nun innerhalb der Arithmetik eine Abbildung dieses Satzes durch eben die im Satz angeführte Formel vorgenommen. Drittens können metamathematische Sätze in einer solchen Weise auf den arithmetischen Formalis-

[138] NAGEL; NEWMAN: Beweis, S 89.
[139] NAGEL; NEWMAN: Beweis, S 85.

mus abgebildet werden, sodass diese wahren arithmetischen Formeln gleichkommen.

> Es folgt, daß die Formel G, die einem wahren metamathematischen Satz entspricht, wahr sein muß. Es muß aber bemerkt werden, daß wir eine arithmetische Wahrheit durch eine metamathematische Argumentation nachgewiesen haben und nicht durch eine formale Deduktion aus den Axiomen der Arithmetik.[140]

Demnach sind die Axiome der Arithmetik in der Tat unvollständig. Um Missverständnissen vorzubeugen: Der Beweis für die Wahrheit von *G* wurde nicht innerhalb des formalen Systems mit Hilfe der rein mechanischen Regeln dieses Systems der Deduktion vollzogen. Ironischerweise muss man, um zu zeigen, dass *G* wahr ist, außerhalb des Systems treten, um nachweisen zu können, dass *G* innerhalb des formalen Systems nicht bewiesen werden kann. Kurz gesagt: Nicht alle arithmetischen Wahrheiten können aus Axiomen abgeleitet werden, denn es sind nicht nur die Axiome der Arithmetik unvollständig, sondern die Arithmetik ist selbst ihrem Wesen nach unvollständig. Selbst durch Hinzufügung zusätzlicher Axiome ändert sich nichts daran, dass das erweiterte System nicht alle mathematischen Wahrheiten liefern kann. Man kann nachweisen, dass andere wahre, formal unentscheidbare Formeln konstruiert werden können, die dennoch innerhalb des „neuen“ Systems nicht entschieden werden können. Wir stehen damit vor der Tatsache, dass wir, unabhängig davon, wie oft das ursprüngliche System erweitert wird, zu einer grundlegenden Begrenzung für die Reichweite der axiomatischen Methode gezwungen sind. Im Widerspruch zu früheren Theorien kann kein formales Axiomensystem konstruiert werden, in dem jeder wahre arithmetische Satz formal abgeleitet werden kann.

All diese Gedankengänge haben Gödel zu dem metamathematischen Satz „Wenn die Arithmetik widerspruchsfrei ist, ist sie unvollständig“ geführt. Dieser Satz kann „als Ganzes genommen“ in der formalisierten Arithmetik durch eine „beweisbare“ Formel vertreten werden, die ohne größere Schwierigkeiten aufgestellt werden kann. Die Aussage „Die Arithmetik ist widerspruchsfrei“ ist äquivalent zu dem Satz „Es gibt

[140] NAGEL; NEWMAN: Beweis, S 92.

mindestens eine arithmetische Formel, die nicht beweisbar ist“, der im formalen Kalkül durch eine Formel *A* abgebildet wird. Die metamathematische Bedeutung dieser Formel besagt, dass mindestens eine arithmetische Formel existiert, für die „keine Folge von Formeln einen Beweis bildet“. Die Formel *A* steht stellvertretend für den vorderen Teil des metamathematischen Satzes „Wenn die Arithmetik widerspruchsfrei ist, ist sie unvollständig.“ Andererseits folgt der hintere Teil in dieser Aussage – nämlich „Sie (die Arithmetik; Anm. EL) ist unvollständig.“[141] – direkt aus „Es gibt einen wahren arithmetischen Satz, der in der Arithmetik nicht formal beweisbar ist“[142], was im arithmetischen Kalkül durch die Formel *G* vertreten wird. In der Formel *A* wird dann der metamathematische Konditionalsatz „Wenn die Arithmetik widerspruchsfrei ist, dann ist sie unvollständig“ durch die Kurzform „$A \supset G$“ dargestellt. Diese Formel *A* ist aber nicht beweisbar, denn andernfalls gäbe es für die Formel *G* einen Beweis. Doch *G* ist formal unentscheidbar und daher nicht beweisbar, es sei denn, der Kalkül ist widersprüchlich. Folglich kann man daraus den Schluss ziehen, dass, wenn die Arithmetik widerspruchsfrei ist, die Formel nicht bewiesen werden kann. Damit sind wir am Ziel angelangt. Wir kommen zu der Schlussfolgerung, dass,

> [w]enn die Arithmetik widerspruchsfrei ist, dann kann ihre Widerspruchsfreiheit nicht durch irgendeinen metamathematischen Beweisgang gezeigt werden, der auf den Formalismus der Arithmetik abbildbar ist![143]

Um Missverständnisse zu vermeiden, muss gesagt werden, dass Gödels Analyse nicht einen metamathematischen Beweis für die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik ausschließt, sondern einen Beweis für die Widerspruchsfreiheit „der auf die formalen Deduktionen der Arithmetik abgebildet werden kann“.[144]

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Gödel uns durch seine Konstruktion eines formalen Systems beweisen kann, dass wahre, aber nicht beweisbare arithmetische Sätze existieren. Damit steht man vor einer unüberwindbaren Grenze, da es eine logische Widerspruchsfreiheit für deduktive Systeme nicht gibt. Diese kann aber schon aus dem Umstand nicht gegeben sein, da der menschliche Verstand begrenzt

[141] NAGEL; NEWMAN: Beweis, S 93.
[142] NAGEL; NEWMAN: Beweis, S 93.
[143] NAGEL; NEWMAN: Beweis, S 94.
[144] NAGEL; NEWMAN: Beweis, S 95.

ist und folglich auch die mathematischen Systeme notwendig unvollständig sein müssen. Basierend auf seinem ersten Unvollständigkeitsbeweis gelangt Gödel schließlich zu dem Ergebnis, dass eine widerspruchsfreie Arithmetik notwendig unvollständig sein muss.

2. TEIL

IV DAS UNENDLICHE, DAS SEIN UND DAS EREIGNIS IN DER PHILOSOPHIE DES ALAIN BADIOU

1 Meditation 13 – Das Unendliche: das andere, die Regel und das Andere

Das vierte große Kapitel – „Das Unendliche, das Sein und das Ereignis in der Philosophie des Alain Badiou“ – mit dem auch der zweite Teil dieser Arbeit beginnt, ist der Versuch, die Mathematik mit dem Eingreifen der Philosophie des Alain Badiou aus der Sackgasse – in die uns die Arbeit Gödels gestürzt hat – herauszuführen und das Problem des Unendlichen in eine neue Richtung zu lenken.

In dieser Meditation steht Badiou vor der Herausforderung, zu beweisen, dass das Sein als solches unendlich ist. Er lehnt daher einen unendlichen Gott, der die endliche Welt geschaffen hat, vehement ab. Gleichzeitig ist er der Überzeugung, dass eine „Theologie des Unendlichen“ sich mit einer „Ontologie des Endlichen“ vereinbaren lässt, da auch das Endliche Unendliches enthalten kann. Als Beispiel aus der Mathematik sei hier z.B. das Intervall [0,1] genannt, das unendlich viele reelle Zahlen beinhaltet und doch endlich begrenzt ist.

Badiou zufolge übt das Unendliche deshalb eine solche Faszination aus, da es der Natur entspricht, denn es „vernichtet“ die Unterscheidung zwischen Gott und der geschaffenen Natur. Infolgedessen muss die ontologische Natur neu angegangen werden, da es dem Sein, der Vielheit, zuteil wird. Er stellt sich nun die Frage, was eine unendliche Vielheit ist und muss hierfür auf die Mathematik mit Cantors unendlich vielen Unendlichkeiten zurückgreifen.

Um seine These zu beweisen, wonach eine Unendlichkeit der Präsentation existiert, muss Badiou zeigen, dass man für das Denken der Idee eines Unendlichen eine Verlaufsregel benötigt. Gleichzeitig erkennt er aber, dass es in diesem Denken eine „Lücke“ gibt und wendet sich daher der Ontologie des Unendlichen zu, die ein Dreifaches verlangt: ein „Schon“, eine Verfahrensweise und die Feststellung der Invarianz. Doch diese drei Forderungen reichen nicht aus, weshalb Badiou als Viertes ein zweites Existierendes einfügen muss, das keinesfalls als Alternative gedacht werden darf.

Die Unterscheidung zwischen den beiden Termini das „Andere“ und das „andere“ ist bei Alain Badiou grundlegend. Während das „andere“ als eine Alternative festgelegt wird, versteht er das „Andere“ als Alterität. Das „Andere“ kann dabei nicht von der Regel her erfasst werden, sondern es ist eine Vielheit, die der Regel nicht nur entzogen ist, sondern sie auch unterbrechen würde. Damit ist das „Andere“ eine Grenze der Regel. Zugleich betont Badiou, dass das Unendliche das Andere ist, das eine Regel ermöglicht. Aus all diesen Überlegungen schließt er letztendlich, dass die These von der Unendlichkeit des Seins einer ontologischen Entscheidung gleichkommt.

1.1 Badious Kritik an einer Ontotheologie und seine These: „Das Sein als solches ist unendlich.“

Badiou steht vom Anfang an vor einem Problem, nämlich, ob die göttliche Unendlichkeit, das abendländische Unendliche – das absolut Unendliche im Sinne Gottes – sich mit der wesentlich endlichen Ontologie der Griechen vereinbaren lässt und er spitzt dies auf die Frage zu, ob das Sein als solches unendlich sei. Aus dieser Fragestellung postuliert er die These der Unendlichkeit des Seins, die er zu untermauern und zu beweisen versucht. Badiou geht dabei nicht von einem metaphysischen oder ontotheologischen Unendlichkeitsbegriff aus, sondern er macht diese Frage zum Ausgangspunkt seiner Überlegungen. Bei seinen Überlegungen führt er eine strikte Trennung zwischen einem ontologischen Denken des Seins-als-Sein und einem philosophischen Denken aus, wobei ersteres koextensiv ist mit dem mathematischen Denken. Wenn Badiou von der „endlichen“ Ontologie spricht, dann geht es ihm um das, was sich der ontologischen Bestimmung verwehrt. Erst dieses „darüber hinaus“, dieses über ein Denken des Seins-als-Sein hinaus, definiert Badiou als Philosophie.

Wirft man einen Blick zurück in die Geschichte, so sieht nicht nur Badiou alleine, dass das Bild des Unendlichen und der wesentlich endlichen Ontologie einem steten Wandel unterworfen war und ist. Er zeigt an Aristoteles’ Unendlichkeitsbegriff ein gewisses Interesse, da dieser das Unendliche nicht mehr als etwas Wirkliches, sondern nur noch als Möglichkeit eines grenzenlosen Weitergehens versteht. Diese Art des Unendlichen definiert Aristoteles als „potentiell Unendliches“, als einen Gedanken der „Fortdauer des Entstehens und Vergehens“. Um Widersprüche auf Grund der Idee eines wirklichen Unendlichen zu vermeiden, lässt er allein die mögliche Unendlichkeit als „Sukzession von Gliedern“ zu, wobei jedes von ihnen trotz ihres Charakters der Endlichkeit eine unendliche Reihe ergibt. Aristoteles versteht unter „seinem“ potentiell Unendlichen nicht „dasjenige, außerhalb dessen nichts mehr ist, sondern dasjenige, außerhalb dessen immer noch etwas ist“[145], weshalb es nicht zu Ende gedacht werden kann.

Dagegen steht der Gedanke des absolut Unendlichen im Sinne Gottes, wobei Badiou den Gottesbegriff des Aristoteles als beispielhaft bewertet.

> Wenn man ihn von der Physik her auffaßt, ist er der letzte Sinn der Bewegung, als höchster unbewegter Beweger. Aber wer wird sagen, daß das Leben ewige Ruhe sein kann? (…) Dieser Gott bleibt (…) den Dingen gegenüber, die er bewegt, völlig indifferent“.[146]

Gleichzeitig ist es interessant, zu wissen, dass Badiou behauptet, dass die Rede von der Unendlichkeit nicht allein durch die griechische Philosophie erschlossen werden kann, da sie das Unendliche als ein Wesensmerkmal der Materie betrachtet. Aus diesem Grund kann dieses Attribut nicht Gott zugeschrieben werden, denn:

> [w]enn das Göttliche sein Wesen im Gestalten des Unbestimmten hat, das Unbestimmte aber zugleich das Unendliche ist, ist Unendlichkeit vom Göttlichen fernzuhalten.[147]

Badiou stellt sich hierauf – wie bereits anfangs erwähnt – die Frage, ob sich seine These mit der endlichen Ontologie der Griechen vereinbaren lässt. Man kann hier wieder auf Aristoteles verweisen, der sich schon sehr früh der Sache der Ontologie, im Sinne einer Seinswissenschaft, annahm, obgleich er noch keinen Namen für diese philosophische „Spezialdisziplin“ der Metaphysik prägte. Nichtsdestoweniger legt er bereits ihren systematischen Rang und ihre thematisierte Hauptrichtung durch die

---

[145] HWdP, S 140 - 146
[146] BADIOU, Alain: Gott ist tot : kurze Abhandlung über eine Ontologie des Übergangs / Alain Badiou. Aus d. Franz. von Jürgen Brankel . Wien : Turia + Kant , 2002, S 13.
[147] LThK, S 387 – 388.

Frage, wodurch das Seiende als Seiendes charakterisiert werden kann, fest. Und so bestimmt Aristoteles das Seiende als Seiendes einerseits dadurch, dass es Eins ist, und andererseits dadurch, dass durch sein „veritatives Sein“ wahre Aussagen und Meinungen in der Tat wahr sind. Badiou aber möchte gerade das Eine aus dem Sein herauslösen, denn dieses Eine, so ist er überzeugt, trifft normative Entscheidungen über das Sein. Im Rückblick auf Aristoteles und „seinem“ potentiell Unendlichen, aber auch auf Georg Cantor (auf den sich Badiou immer wieder beruft), nach dessen Lehre das absolut Unendliche existiert, sieht er in der Tradition zwei Versionen des Unendlichen, wobei er zunächst einmal sein Augenmerk auf diejenige richtet, in der Gott deshalb das Unendliche ist, weil er die Natur geschaffen hat. Seiner Meinung nach stellt die Verbindung zwischen der Idee „eines höchsten Seienden (…) mit einer substantialistischen Lehre (…), in der das Sein am Ort der eigenen Grenze angeordnet wird“[148] für die großen Philosophen des Mittelalters keine unüberwindbare Hürde dar. Im Gegenteil:

> Es eröffnet ihnen das Sein als endliche Entfaltung einer singulären Differenz zu denken und zugleich, auf dem Gipfel einer repräsentierbaren Hierarchie, Platz für einen Überschuss an Differenz zu schaffen, an dem – unter dem Namen Gottes – ein Sein angenommen wird, auf das keine der endlichen begrenzenden Unterscheidungen, die uns die geschaffene Natur anbietet, mehr zutrifft.[149]

Die Geschichte zeigt, dass sich bereits viele Philosophen vor Badiou der Frage nach dem Sein und Seienden gewidmet haben. Er selbst verweist in dieser Meditation auf jene des Mittelalters.[150] Seine Kenntnisse über die Geschichte der Philosophie veranlassen Badiou letztlich zu bekennen,

---

[148] BADIOU, Alain: Das Sein und das Ereignis / Alain Badiou. Aus dem Franz. übers. von Gernot Kamecke . - 1. Aufl. . - Berlin : Diaphanes-Verl. , 2005, S 163. [SE, S 163].
[149] BADIOU: SE, S 163.
[150] Die Frage nach dem Sein und Seienden im Mittelalter wird im Hauptwörterbuch der Philosophie wie folgt zusammengefasst: Gemäß AUGUSTINUS (…) ist der Ursprung der Dinge «summa essentia», unveränderlich, sich selbst gleich, unzerstörbar und der Zeit enthoben, als S.[ein] im wahrsten Sinne. JOHANNES SCOTUS ERIUGENA lehrt, jedes geschaffene Wesen, vornehmlich das in Raum und Zeit Existierende, sei Sd.[Seiendes] und zugleich Nicht-Sd., nämlich hinsichtlich dessen, was es jeweils nicht ist. Der Schöpfer überragt jede kategorial bestimmte Weise zu sein (…) und kann insofern sogar Nichts genannt werden. THIERRY VON CHARTRES legt Exod. 3,14 so aus: (…)«Als wenn er sagte:

> [...] dass der christliche Monotheismus, obwohl er Gott als unendlich bezeichnet, keinen unmittelbaren oder radikalen Bruch mit dem griechischen Finitismus herbeigeführt hat. Das Denken des Sein als solches wird (…) im Grunde nicht berührt. Die Möglichkeit dieser kontinuierlichen Anordnung des ontologischen Diskurses beruht natürlich darauf, dass das metaphysische Zeitalter des Denkens die Frage des Seins in derjenigen des höchsten Seienden auflöst und dass die Unendlichkeit des Gott-Seienden von einem Denken des Seins als Sein, das im Wesentlichen endlich bleibt, umfasst werden kann. (…) Das Un-endliche ist die punktuelle Grenze für die Ausübung *unseres* Denkens des endlichen Seins.[151]

Insofern Badiou seine These „das Sein als solches ist unendlich“ beweisen möchte, muss er selbst einen unendlichen Gott, der die endliche Natur geschaffen hat, vehe-

---

Siehe, ich bin der, dem kein anderes S. zukommt als genau das, was Sein ist. (…) AVICENNA [erläutert; Anm.: EL]: Durch die Akzidentalität des S. unterscheidet sich das geschaffene Sd. von dem, das an und durch sich selbst notwendigerweise existiert und Ursprung alles anderen ist (…). (…) AVEROES [:; Anm.: EL] Sd. als Sd., der Gegenstand der ‹Ersten Philosophie› ist nicht das Sd. im allgemeinen, sondern das göttliche Sd. (…) BONAVENTURA zufolge benennt ‹S.› den «reinen Akt des Sd.» (…). Dies ist, was als erstes in unser Verstehen fällt, nämlich kein partikuläres und begrenztes S., sondern das göttliche S. Wir sind uns dieser Bedeutung nur nicht bewusst. (…) ALBERTUS MAGNUS [versteht das; Anm.: EL] ‹S.› (…) als die eigentümliche Wirkung der Ersten Ursache. (…) THOMAS VON AQUIN [:; Anm.: EL] Das Wort ‹Sd.› benennt (…) das, was der Verstand als erstes erfaßt und worauf jeder begriffene Inhalt in letzter Analyse führt. Was auch immer erfaßt wird, ist Sd., d.h. «etwas, das ist». (…) Zu dem, was der Verstand als erstes erkennt, gehört das Sein dessen, was als Sd. begriffen ist (…). Denn «Sd. wird von sein her gesagt» (…). So betrachtet erweist das Sein sich als unendlich und unbegrenzt; denn es schließt keine der unbegrenzt vielen denkbaren Weisen von Wirklichem aus, und kein noch so großer Reichtum von S.-Weisen vermag es zu erschöpfen. Es ist das Vollkommenste (…). Kein Sd. hat Macht über sein S. Der S.-Akt eines Sd. (…) kann nicht von diesem Sd. selbst bewirkt sein. Er muß von einem anderen herrühren. Die Quelle, der er entspringt, läßt sich aber nicht als etwas begreifen, das S. nur hat. Sie muß gedacht werden als etwas, das am S. nicht bloß teilhat, sondern das seinem Wesen gemäß S. ist. Diese Quelle, Gott, ist das subsistierende S. (…). Die S.-Lehre MEISTER ECKHARTS [:; Anm.: EL] Sd. und S., absolut aufgefaßt, enthalten jedoch (…) keinerlei Beschränkungen. (…). [Er verwendet; Anm.: EL] das Sd. absolut genommen. (…) Die umstrittene These «Das S. ist Gott» (…) mit der er die geläufige Aussage «Gott ist S.» ergänzt, erklärt er, indem er das S. absolut begriffen unterscheidet vom «S., das formartig [einem Sd.] innewohnt» (…). (…) Das S., absolut aufgefaßt, ist äußerster Gegensatz des Nichts. (…) Das Geschaffene ist daher Sd., insofern es mit Gott verbunden ist, und zugleich als von Gott Verschiedenes auch ein Nichtseiendes. Das S. empfängt seinen Sinn nicht von irgendeinem geschaffenen Sd., sondern ist und bleibt das S., das Gott ist. [Siehe HWdP: S 186 - 194]

[151] BADIOU: SE, S 163.

ment ablehnen. Gleichzeitig kritisiert er das Modell eines ersten unbewegten Bewegers auf das Schärfste, da Badiou behauptet, dass das Unendliche bloß von der Regel her gefasst werden kann, die es nicht übertreten kann, das heißt, es gibt das Unendliche nicht vor der Regel und nicht außerhalb der Regel. So kann man ohne Weiteres daraus schließen, dass Badiou mit seinem Denken der über Jahrhunderte währenden christlichen oder zumindest mittelalterlichen Tradition von Gott als dem Unendlichen ein Ende setzte. Darin liegt auch seine Kritik an der Theologie, sofern Badiou in der Lehre des mittelalterlichen Christentums den Grund dafür sieht, weshalb

> [...] es keinen unüberschreitbaren Abgrund zwischen Ihm [Gott; Anm.: EL] und der geschaffenen Natur gibt, denn deren vernünftige Beobachtung liefert uns den Beweis für seine Existenz. Der eigentliche Operator dieses Beweises ist im Übrigen die – mit der natürlichen Existenz in besonderer Weise verbundene – Unterscheidung zwischen der Herrschaft der Bewegung, die den endlichen Substanzen der Natur eigen ist, und der Unbeweglichkeit, die mit Gott als höchstem unbewegtem Beweger die unendlich genannte Substanz charakterisiert.[152]

Badiou lehnt demnach die Idee „Gott als unbewegter Beweger“ vehement ab. Insofern stellt sich die Frage, wie weit er damit geht:

> Was bezeichnet der Name Gottes in der Formel „Gott ist tot“? (…) Das ist übrigens der ganze Unterschied zwischen der theoretischen Formel „Gott existiert nicht“ und dem historischen oder auf Tatsachen beruhenden Ausspruch „Gott ist tot“. Die Formel, die in Form eines Theorems ausgedrückt ist, (…) setzt voraus, daß Gott ein Begriff ist, dessen Theorem über die Inexistenz, das immer beweisbar ist, die Bedeutung reaktiviert. Wenn man sagt: „Gott ist tot“, dann macht man dagegen aus Gott einen Eigennamen. [153]

[152] BADIOU: SE, S 164.
[153] BADIOU: Gott, S 7.

Insofern Badiou beginnen würde, zwischen verschiedenen Gottesvorstellungen zu differenzieren, würde die Formel „Gott ist tot“ ihre Exklusivität verlieren. Womöglich stieße er in weiterer Folge z.B. auf eine Vorstellung Gottes, die mit dem Unendlichen gleichgesetzt werden kann, oder vielleicht auf einen Gottesbegriff, der etwas mit seinem Begriff des „Ereignisses“ zu tun haben könnte, den er sich vermutlich an dieser Stelle noch nicht vorstellen kann. Infolgedessen könnte man zu dem Schluss kommen, dass gerade darin die Schwäche im Badiouschen Denken liegt. In Bezug auf Gott drängt sich Badiou die Notwendigkeit der Frage auf: „(…) daß, wenn man annimmt, daß er gestorben ist, er es seit langem ist.“[154] Badiou schreibt hierzu:

> Vielleicht beginnt man sogleich nach der Predigt von Paulus das sterben zu lassen, was das einzig wahre Leben Gottes war, die Wiederauferstehung Christi, die ein einziger und entscheidender Sieg über den Tod war.[155]

Badiou erkennt die Problematik der Formel „Gott ist tot“. Sie ist einfach und zugleich kompliziert, denn: „Wenn man behauptet „Gott ist tot“, dann war der Gott, über den man spricht, lebendig und gehörte zum Bereich des Lebens“. Daher endet jede Wahrnehmung der Frage nach Gott als Frage (…) mit der Schlußfolgerung, daß er nicht tot ist, ja sogar, daß er unsterblich ist.[156] Seiner Meinung nach ist es sowohl mit Gott als auch mit der Religion ein für alle mal aus. Sie kehren nicht mehr zurück:

> (…) der Metaphysik (…) gebührt in Wirklichkeit nur ein toter Gott, ein schon toter oder seit langem gestorbener Gott, ein Gott, dessen Glauben keine Religion speisen kann.[157]

Gleichzeitig kann er trotz alledem positive Ansätze an Aristoteles’ Gottesbegriff ausmachen, dessen Gott den Dingen gegenüber, die er in Bewegung versetzt, vollkommen indifferent ist. Derselbe Gott aber wird in der Metaphysik so verstanden, dass er

[154] BADIOU: Gott, S 7.
[155] BADIOU: Gott, S 7.
[156] BADIOU: Gott, S 9.
[157] BADIOU: Gott, S 12.

reiner Akt ist und kein anderes Amt hat, als sich selbst zu denken, denn es gibt keinen Grund für ihn, etwas anderes als seine eigene Reinheit zu denken.

In Bezug auf den Begriff des Seins setzt sich Badiou mit Martin Heidegger und „dessen“ Metaphysik auseinander. Badiou anerkennt, dass es Heideggers Werk war, die Philosophie nach einer Epoche des Vergessens wieder an die Frage nach dem Sein zu binden.

> M[etaphysik] als „die grundsätzliche Erkenntnis des Seienden als solchem und im ganzen“ oder als „Frage nach dem Sein eines Seienden“. „Die Fundamentalontologie“ von ‹Sein und Zeit› wird dementsprechend als „M. des Daseins“ bezeichnet und die Zusammengehörigkeit „der Idee der Ontologie und (…) der M.“ betont, wobei „die Fundamentalontologie (…) aber nur die erste Stufe der M.“ sei. [158]

Zwar proklamiert Heidegger in seinen späteren Jahren eine eigenartige Form der Metaphysikkritik, dennoch kann seine Bedeutung für die Metaphysik nicht bestritten werden. Passend hierzu heißt es in der „Einleitung zu: ‚Was ist Metaphysik?‘“:

> Dass die Metaphysik, der die Meditationen des Spätdenkens gelten, ontologisch verfasst ist, heißt für Heidegger im Wesentlichen ein Doppeltes. „(…) die Metaphysik stellt die Seiendheit des Seienden in zweifacher Weise vor: einmal das Ganze des Seienden als solchen im Sinne seiner allgemeinsten Züge (…); zugleich aber das Ganze des Seienden als solchen im Sinne des höchsten und darum göttlichen Seienden (…). Die Metaphysik ist in sich (…) zweifach-einig die Wahrheit des Seienden im Allgemeinen und im Höchsten. Sie ist ihrem Wesen nach zugleich Ontologie im engeren Sinne und Theologie.“[159]

Beide, Badiou und Heidegger, beschäftigen sich auf ihre je eigene Weise mit dem (von Kant geschaffenen) Begriff der Ontotheologie. Heidegger charakterisiert die On-

[158] HWdP: S 1270.
[159] „Einleitung zu: ‚Was ist Metaphysik?‘“, in Wegmarken, GA, Bd. 9, S 378f.

totheologie als eine „Art“ der Metaphysik insofern diese „die Frage nach dem Seienden als solchem und im Ganzen bestimmt. Die Ganzheit dieses Ganzen ist die Einheit des Seienden, die als der hervorbringende Grund einigt.“[160] Im Gegenteil dazu liegt Badious Absicht darin, demjenigen die Treue zu versprechen, der sich nie dem geschichtlichen Zwang der Onto-Theologie gebeugt hat. Badiou gelangt durch seine intensiven Überlegungen zu folgender Ansicht:

> Im Rahmen dessen, was Heidegger die Onto-Theologie nennt – also die metaphysische Abhängigkeit des Seinsdenkens von einem höchsten Seienden –, sagt die Differenz zwischen dem Unendlichen und dem Endlichen (die ontologische Differenz oder die Differenz im Seienden) streng genommen nichts über das Sein als solches aus.[161]

1.1.1 Das Paar unendlich/endlich

Badiou ist der Überzeugung, dass die Tatsache, dass das Paar unendlich/endlich innerhalb der ontologischen Differenz keinen Platz findet, der alles erhellende „Schlüssel“ dafür ist, dass sich eine „Theologie des Unendlichen“ mit einer „Ontologie des Endlichen“ vereinbaren lässt.

> Der unendliche Gott des mittelalterlichen Christentums *ist* – als solcher – wesentlich endlich. Dies ist offenkundig der Grund dafür, dass es keinen unüberschreitbaren Abgrund zwischen Ihm und der geschaffenen Natur gibt, denn deren vernünftige Beobachtung liefert uns den Beweis für Seine Existenz. Der eigentliche Operator dieses Beweises ist (…) [die; Anm.: EL] Unterscheidung zwischen der Herrschaft der Bewegung, die den Substanzen der Natur eigen ist, und der Unbeweglichkeit, die mit Gott als höchsten unbewegten Beweger die unendlich genannte Substanz charakterisiert.[162]

[160] HWdP: S 1207.
[161] BADIOU: SE, S 163f.
[162] BADIOU: SE, S 164.

Eben deswegen schlägt Badiou den schwierigen Weg ein, der selbst nicht über ein höchstes Seiendes führen kann, um die wirkliche Unendlichkeit des Seins zu erforschen. In seinem eigenen Denken verbindet Badiou die „These der Unendlichkeit des Seins“ mit dem ontologischen Aufkommen einer Mathematik des Unendlichen, das die griechische Grenze niederreißt und die Vorrangstellung des Seienden in Frage stellt, da sich in ihr die endliche ontologische Wesenheit der Unendlichkeit von sich aus mit dem Namen Gottes in Szene setzt.

In *Sein und Ereignis* verweist Badiou nicht selten auf Georg Cantor. Sofern man dazu bereit ist, kann man eine einzigartige Beziehung zwischen den beiden ausmachen. Auf dieselbe Weise wie Badiou in seinem Denken eine Verbindung zwischen „seiner“ Philosophie und der Mathematik erstellt und uns noch weit darüber hinausführt, so war es für Cantor ein besonderes Anliegen „seine“ Mathematik in ein größeres „allumfassendes“ System wissenschaftlicher Forschung zu integrieren. Aus diesem Grund vermag man zu sagen, dass in Cantors Denken Metaphysik, Philosophie und Theologie einen bedeutungsvollen Raum einnehmen, und zwar in der Hinsicht, als sich alle drei noch die Frage stellen, „was die Welt im Innersten zusammenhält“. Eben darin zeichnet sich das Herausragende und Einmalige seines persönlichen Weges aus. Für Cantor existieren die Ideen und Auffassungen der Mathematik zweifelsohne als ewige Wahrheiten, gegen welche man verfehlen würde, schließe man von ihnen nicht auf den Ursprung alles Seins. Demgemäß „muss“ nach seiner Auffassung seine Mengenlehre der Metaphysik angehören, da sie durch sich selbst die Erkenntnis in der Metaphysik fördert.

Es ist naheliegend, dass nicht nur Cantors Denken allein auf Badiou Eindrücke hinterlassen hat. Die Ideen und Gedanken vieler anderer großer Philosophen und Theologen ließen in ihm Erkenntnisse wachsen, sodass er heute sagen kann, dass die

> These über das Unendliche paradoxerweise nicht Gott, sondern die Natur betrifft. Die Kühnheit der Moderne beruhte (…) darauf, den Gebrauch dieses Begriffes exzentriert und von seiner Funktion als Verteilungsinstanz der Regionen des Seienden-im-Ganzen auf eine Beschreibung

> des Seienden-als-Seiendes (…) verlagert zu haben: Die Natur, sagten die Modernen, ist unendlich.[163]

Die christliche Theologie sah darin einen Angriff auf ihre Lehre und reagierte hierauf in der Art und Weise, dass sie verstärkt bestrebt war,

> die ontologische Endlichkeit universell beizubehalten, das Unendliche als ein Attribut des Eins-Seienden zu denken und für die Vielheit die ontische Bedeutung der Endlichkeit zu reservieren.[164]

Hieraus ergibt sich für Badiou die Konsequenz, dass man, sofern man den endlichen ontologischen Rahmen bewahren möchte, die Bedingung aufstellen muss, dass es ein Sein des „Eins“ gibt, welches das Unendliche (Gott) und das Endliche (Natur) zu Seiendem erhebt. Diese Doppeldeutigkeit, der in dem Wort „Endliches“ mitschwingt und sowohl ontisch die „Kreatur“ als auch ontologisch das Sein (einschließlich Gott) mit hineinnimmt, hat ihren Ursprung in einer bewusst wahrgenommenen Gegenwärtigkeit, die dafür sorgt, dass „das Eins ist“.

Man muss sich, so Badiou, bewusst machen, dass die These „Die Natur ist unendlich“ die These über die Welt quasi bloß streift und zwar deshalb, weil „die Welt“ unaufhörlich als ein „Sein-des-Eins“ begriffen werden und deshalb weiterhin als ein Trugschluss auftreten kann. Die Ursache dafür, dass wir vor der Schwierigkeit eines punktualisierten Gottes stehen, liegt in der offensichtlichen Unzulänglichkeit, die sich auftut, wenn die Unendlichkeit der Natur lediglich die Unendlichkeit der Welt kennzeichnet. Es erscheint deshalb als augenscheinlich, dass

> die finitistische Substruktur der Ontologie bis in diese Verwandlung hinein bestehen bleibt, in der die ontische Unendlichkeit ihren transzendenten und persönlichen Status verliert und zu einer kosmologischen Raumaus-

[163] BADIOU: SE, S 164.
[164] BADIOU: SE, S 165.

> dehnung wird, ohne dabei eine radikale Aussage über die wesentliche Unendlichkeit des Seins zu ermöglichen.[165]

1.1.2 „Das Sein ist.“ – „Das Sein ist nicht.“

„Das Sein ist.“ – „Das Sein ist nicht.“: Die großen christlichen Denker auf der einen – Badiou auf der anderen Seite. Hier stehen zwei Positionen gegenüber, die unweigerlich zu philosophischen Auseinandersetzungen führen müssen. Die Herausforderung an die christliche Theologie ist es, so Badiou, einen ersten Schritt zu vollziehen um zu erkennen, dass der wahre Sinn der Unendlichkeit der Natur sich – unter der Voraussetzung, dass das Eins nicht ist – in der reinen Vielheit, oder anders formuliert, in der Präsentation offenlegt und dass dieses Denken nicht weiterhin eisern auf einer endlichen ontologischen Struktur beharrt. Dass der Begriff des Unendlichen überhaupt eine so immense und fesselnde Anziehungskraft auf das Denken der Menschen ausübt, setzte nach Badiou mit der These ein, dass dieser – der Begriff des Unendlichen – der Natur entspräche. Er formuliert:

> Denn alle Welt spürte, dass man hier die onto-theo-logische Ordnung selbst an ihrem besonderen Kreuzungspunkt mit dem Paar unendlich/endlich berührte und dass man dadurch das einfache Merkmal für die regionale Unterscheidung innerhalb des Seienden-im-Ganzen zwischen Gott und der geschaffenen Natur zerstörte.[166]

Damit war etwas vollkommen Neues eingetreten, dass das finitische Credo herausforderte die ontologische Frage erneut zu stellen. Badiou ist der Überzeugung, dass, wenn man davon ausgeht, dass das Unendliche natürlich ist, man daraus schließen muss, dass – insofern es sich offenbart, sich zeigt oder anders formuliert: sich präsentiert – dieses Prädikat dem Sein, also der Vielheit an sich, zuteil wird.

Darauf aufbauend wendet sich Badiou der abstraktesten Form des Seins zu, die für das Erste in der Unendlichkeit der Situation wahrgenommen werden kann, durch

[165] BADIOU: SE, S 165.
[166] BADIOU: SE, S 165.

welche erst die Verschränkung zwischen der Zählung-als-Eins[167] und den unendlichen Vielheiten möglich ist. Badious Frage lautet nun: „Was (…) ist eine unendliche Vielheit?“ In der Auseinandersetzung mit dieser gestellten Frage greift Badiou erneut auf die Mathematik zurück, da es seiner Meinung nach jenseits der Mathematik keinen Begriff des Unendlichen gibt. Ihm zufolge vermag man allein in ihrem Rahmen das Sein als Sein anzuwenden. Andernfalls verbleibt eine vage Phantasie eines „sehr Großen“. Gleichzeitig aber muss Badiou zur Kenntnis nehmen, dass diese Frage bis heute selbst in der Mathematik noch nicht eindeutig entschieden ist.

Hierin liegt genau das Bestreben Badious: Er möchte (mit Hilfe des Begriffs des Ereignisses) über die Grenzen der Mathematik hinausweisen und neue Wege begehen, die weit über die mathematischen Einschränkungen hinausführen. Er beteuert dabei,

> dass das Sein [nicht nur; Anm.: EL] unendlich ist, sondern auch, dass *nur es allein* unendlich ist. Oder genauer: Das Unendliche ist ein Prädikat, das dem Sein nur zukommt, wenn es als Sein betrachtet wird.[168]

Badiou fordert in dieser Situation eisern, dass das Unendliche in Anbetracht der mathematischen Lehre vom Sein unter allen Umständen absolut vom Eins, das nicht ist, geschieden werden muss und hält es des Weiteren für ausgeschlossen, „dass es *Eins*-Unendliches gibt, es wird notwendig Unendlich-*Vielheiten* geben.

In *Gott ist tot* beschreibt Badiou diesbezüglich sein Anliegen:

> Kann man das Eine aus dem Sein herauslösen, die metaphysische Durchsuchung des Seins durch das Eine zerbrechen (…?) (…) Kann man das Denken retten oder hat sich gar das Denken in Wirklichkeit seit

---

[167] Badiou schreibt in *Das Sein und das Ereignis* auf Seite 38 Folgendes zur Zählung-als-Eins: „Das Eins das nicht ist, existiert nur als *Operation* (als Rechenverfahren). Oder anders gesagt: Es gibt nicht »das Eine« [*l'Un*], es gibt nur die Zählung-als-Eins. (…) Jede Situation lässt einen Operator der Zählung-als-Eins zu, der ihr eigen ist. Das ist die allgemeine Definition einer *Struktur*, nämlich dasjenige zu sein, was einer präsentierten Vielheit das Gesetz der Zählung-als-Eins vorschreibt.

[168] BADIOU: SE, S 166.

> je gerettet, ich will sagen, vor der normativen Potenz des Einen gerettet (…)?[169]

Badiou bekennt hierauf, dass er in seinem Bestreben demgegenüber eine Treue verspürt, welches sich nicht der „durchsuchenden Kraft des Einen“ unterworfen hat. Aus diesem Grund liegt sein erster Entscheid darin,

> einzulösen, daß das, was vom Sein denkbar ist, sich in der Form des radikalen Vielfachen erhält, des Vielfachen, das nicht unter der Potenz des Einen steht. Dessen was ich [Badiou; Anm.: EL] in *L'Être et l'Événement* [*Das Sein und das Ereignis*] das Vielfache ohne Eins genannt habe.[170]

Kehrt man nun zu dem Eins-Unendlichen und den Unendlich-Vielheiten zurück, so stellt Badiou zu Recht die Frage, ob man denn einen simplen Terminus der unendlichen Mannigfaltigkeiten bzw. Mengen zu erkennen vermag. Lässt man nämlich einen solchen Begriff zu, dann würden wir vor dem bereits erwähnten Irrtum stehen, dass die dem Begriff entsprechenden Vielheiten in einer gewissen Art und Weise die „größten“, die „mächtigsten“ wären und dennoch nicht „weniger Vielheiten“ als die anderen Mannigfaltigkeiten. Als Konsequenz daraus würde uns das Unendliche, so Badiou,

> „sobald es jenseits der unendlichen Vielheiten nichts mehr gäbe, zum höchsten Seienden zurückführen und das Denken der reinen Vielheiten mit einem Haltepunkt belegen.“[171]

Aber Cantor vermochte zu zeigen, dass es einen mathematischen Weg von immer „größer“ werdenden Unendlichkeiten gibt und entspricht darin dem Denken Badious, für den das Sein solcher unendlicher, untereinander differenzierbarer Vielheiten, die sich „bis ins Unendliche“ erstrecken, unverzichtbar ist. Diese Sichtweise hat zur Fol-

[169] BADIOU: Gott, S 24.
[170] BADIOU: Gott, S 26.
[171] BADIOU: SE, S 167.

ge, dass nicht nur das Eins-Unendliche aufgehoben wird, sondern auch die „Einzigkeit“ des Unendlichen.

1.1.3 Es existiert eine Unendlichkeit der Präsentation

Badiou steht erneut vor einem Problem, und zwar, welche Mittel notwendig sind, um seine These „es existiert eine Unendlichkeit der Präsentation“[172] stichhaltig zu unterlegen. Er wird sich bewusst, dass es unumgänglich ist, neue Wege zu erkunden, um ein Denken eines Unendlichen „ohne der Vermittlung des Eins“ zu ermöglichen. Badiou nimmt hierzu Aristoteles’ Denken zu Hilfe, da dieser bereits zu Erkenntnis gelangte, dass das Denken der Idee des Unendlichen [für ihn im Sinne des Unbegrenzten; Anm.: EL] eine Verlaufsregel benötigt.[173] Die Notwendigkeit einer fest definierten Regel zeigt sich ihm zufolge darin, dass man, selbst wenn es eine Methode für die vollständige Erfassung gäbe, nicht im Stande wäre, das Unendliche vollständig mit den Gedanken zu erfassen.

Für Badiou ergibt sich aus diesen Überlegungen folgende Notwendigkeit:

> Zwischen einem Übergangsschritt der Vorgehensweise (welche diese auch sei) und dem Ziel – das heißt der angenommenen Grenze des in Betracht gezogenen Seienden – gibt es immer „noch einen“ Schritt. Das physische „im Körper“ [l’encorps] des Seienden ist hier das „Noch“ [l’encore] der Denkprozedur, an welcher Stelle in ihrem Versuch der vollständigen Erfassung sie sich auch immer befindet.[174]

Badiou weiß sehr wohl, dass Aristoteles sich seiner Position verwehren würde, da ihm zufolge das „Schon-da“ des von Badiou bestimmten Seienden bereits seine Grenzen in sich mit einschließt. Badiou selbst beharrt darauf, dass gerade die innere Gegensätzlichkeit des „Schon“ und des „Noch“ zentral sind. Allein durch die bereits

---

[172] Badiou definiert in *Das Sein und das Ereignis* auf S 549 den Begriff der Präsentation: Ursprüngliches Wort der Metaontologie (oder der Philosophie). Die Präsentation ist das Vielheit-Sein in seiner tatsächlichen Entfaltung. „Präsentation“ ist reziprok zu „inkonsistente Vielheit“. Das Eins wird nicht präsentiert, es resultiert und macht so die Vielheit konsistent.
[173] BADIOU: SE, S 167.
[174] BADIOU: SE, S 167.

vollzogene Präsentation einer Vielheit kann sich (bezüglich ihrer selbst) ein allumfassender Vorgang herauskristallisieren, auf den sich das Bewusstwerden eines selbst stützt. Gleichzeitig nimmt Badiou selbst wahr, dass sich in seinem Denken eine „Lücke“ auftut:

> Wenn aber die Vielheit tatsächlich schon präsentiert ist, wie kann dann der Verlauf ihrer Präsentation danach verlangen, immer noch im Kommen zu sein?[175]

Um sich dieser Hürde zu stellen, wendet sich Badiou nun der Ontologie des Unendlichen (bzw. den unendlichen Vielheiten, die „ohne die Vermittlung des Eins“ auskommen) zu, die drei Dinge einverlangt:

A) Ein „Schon“, einen Seinspunkt, also eine präsentierte bzw. existierende Vielheit.
B) Eine Verfahrensweise – eine Regel –, die anzeigt, wie ich von einem präsentierten Term zu einem anderen gelange. Diese Regel ist erforderlich, damit ihre Ohnmächtigkeit, die Gesamtheit einer Vielheit zu durchlaufen, die Unendlichkeit dieser Vielheit bewahrheitet.
C) Die Feststellung der Invarianz, ausgehend vom „Schon“ und gemäß der Regel, eines „Noch“ dieser Regel, das heißt eines noch nicht erreichten Terms.[176]

Hier sieht sich Badiou vor einer neuen Herausforderung, denn er erkennt, dass die drei Forderungen der Ontologie des Unendlichen nicht genügen und ihn auf seinem eigenen Weg zum Stehenbleiben verurteilen würden. Aus diesem Grund muss er eine deutliche Zäsur ziehen, denn der Stand der Dinge legt zwar die Ohnmächtigkeit der Regel offen auf den Tisch, aber er vermag es nicht, den Grund für die Existenz dieser Ohnmacht anzugeben.

[175] BADIOU: SE, S 167.
[176] BADIOU: SE, S 168.

Badiou zieht daraus die Konsequenz, dass er noch ein Weiteres verlangen muss, das nicht innerhalb der Ontologie des Unendlichen liegen kann, da diese tatsächlich nur jene drei Forderungen stellen kann. Das Auftauchen eines Vierten stellt gewissermaßen deren Scheitern dar und fordert gleichzeitig nach einem Auftreten eines „neuen“ Unendlichen, das der Regel nicht mehr entsprechen kann.

Demnach könnte man Badiou vorwerfen, dass er nicht sofort vier Forderungen einverlangt hat, doch täte man ihm damit Unrecht, weil die Ontologie des Unendlichen tatsächlich nur diese drei hat. Da diese Forderungen A) bis C) nicht genügen, muss ein Viertes eingefordert werden. Wichtig ist dabei, festzuhalten, dass Badiou dieses nicht etwa vergessen hat, sondern innerhalb der Ontologie des Unendlichen gibt es nur diese drei. Mit dem Auftauchen eines Vierten wird zum einen das Scheitern der Ontologie sichtbar und zum anderen kommt es gleichzeitig zu einem Auftauchen eines neuen, nicht regelhaften Unendlichen. In dieser vierten Forderung verlangt Badiou:

D) Ein zweites Existierendes (neben dem „Schon“), das den Grund für das Scheitern des vollständigen Erfassungsvorgangs enthält, das heißt eine Vielheit, die so beschaffen ist, dass sich in ihr das „Noch“ wiederholt.[177]

Der vierte Punkt darf ihm zufolge hier nicht als eine Alternative gesehen werden. Es ist dasjenige, das in der Vollständigkeit von A) bis C) als Leerstelle verbleibt. Im Prinzip startet er zunächst den Versuch, mit Hilfe der ersten drei Punkte Vollständigkeit zu denken, doch er muss schon bald sehen, dass diese nicht vollständig sind. Eben deshalb ist für Badiou die Notwendigkeit eines zweiten Existierenden – eines Noch-des-Eins, eines Noch-Eins – im Prinzip die Konsequenz aus dem Scheitern der Vollständigkeit von A) bis C).[178] Die Konsequenz dieser Unvollständigkeit führt ihn letztlich zu etwas Fehlendem hin: Eine Leerstelle. Dieses zunächst intuitiv negativ Besetzte verändert schlagartig seine Ausrichtung: Die Lücke wird „plötzlich“ zu etwas Positivem!

[177] BADIOU: SE, S 168.
[178] Badiou spricht hier von einem Noch-Eins. Die Gefahr liegt darin, dieses Etwas als etwas Dingliches zu sehen. An dieser Stelle versucht Badiou vielmehr zu zeigen, dass etwas fehlt bzw. dass die Struktur durchlässig ist. Man könnte hier den Eindruck gewinnen, dass dieses Noch im Sinne einer Öffnung, einer Unabgeschlossenheit verstanden werden kann.

Der Grund, weshalb für Badiou die Forderung eines zweiten Existierenden (neben dem „Schon") unerlässlich ist, zeigt sich in dieser Aussage:

> Ohne diese Existenzannahme [eines zweiten Existierenden; Anm.: EL] wäre es möglich, dass die Regel – bzw. die Verfahrensweise, deren Etappen so zahlreich sie auch sein mögen, Endliches ergeben – ihrerseits empirisch unfähig ist, zur Grenze zu gelangen. Wenn die vollständige Erfassung prinzipiell ist (und nicht empirisch), dann muss die Verdoppelung des „Noch" an der Stelle eines Existierenden, das heißt einer präsentierten Vielheit, erkennbar sein.[179]

Badiou zufolge hängt die Voraussetzung für die Definition einer Vielheit als unendlich von der Unfähigkeit der Regel ab, dass sie nicht im Stande ist, die Vielheit vollständig zu durchlaufen. „Die Vielheit muss also „woanders" präsentiert werden, ebenso wie der Ort der Ohnmächtigkeit der Regel."[180] Mit anderen Worten: Badiou definiert die Regel als dasjenige, das einem den Weg zeigt, wie man von einem Term aus den nächsten erreichen kann. Die Regel alleine genügt aber nicht, um tatsächlich in Aktion treten zu können. Insofern braucht sie zunächst einen Anfang, ein „Schon", eine sich präsentierende Vielheit, die gegenüber allen kommenden möglichen Nachfolgen invariant ist und im Nachhinein rückwirkend als „Fixpunkt" an den Beginn gesetzt wird. Badious Ausgangssituation ist, dass er vor einem Term steht und von diesem ausgehend mit Hilfe der Verfahrensweise zu einem weiteren Term gelangen möchte. Dieser andere Term aber ist vom Prinzip her eigentlich „gleich" dem anderen, insofern sich in ihm das „Noch-Eins" wiederholt. Seine Funktion beschränkt sich einfach nur darauf, dass er zwischen seinem anderen, oder einfacher gesagt seinem „vorangehenden" Term, und dem „Noch-Eins", sprich dem „noch kommenden", vermittelt. Einzige Ausnahme stellt hier das existierende „Schon" dar, da dieses definitionsgemäß keinen Vorgänger hat. Bereits jetzt kann man entdecken, dass es hier zu einer Einebnung der „verschiedenen" Terme kommt, die nur mehr als „Gleiches" erkannt

[179] BADIOU: SE, S 168.
[180] BADIOU: SE, S 168.

werden können. Der Umstand, „dass sich hier alle am Rande des „Noch-ein-anderes“ befinden, macht aus jedem der anderen das Gleiche“.[181]

„Die Regel zwingt dem anderen seine ohnmächtige Identität auf.“[182] Insofern existiert jene Vielheit, in der dieses Gleich-werden der anderen gemäß dem Noch-ein-anderes erfolgt und alle anderen in ihr enthalten sind. „[D]ann lasse ich [Badiou; Anm.: EL] nicht „noch-ein-anderes“, sondern jenes Andere schlechthin vorkommen, aus dem hervorgeht, dass es anderes (also Gleiches) gibt.“[183]

1.1.4 Das „andere“ und das „Andere“

Der Unterschied zwischen den beiden Begriffen das „Andere“ und das „andere“ ist in Badious Denken fundamental. Das kleingeschriebene „andere“, das er auch als das „andere-Gleiche“ bezeichnet, kann man sich vorstellen wie eine Alternative, insofern es einfach als „ein anderes“, „ein weiteres“, ein „Noch-Eins“ bestimmt wird. (Badiou selbst argumentiert mit diesem „Noch“.) Im Gegensatz dazu ist das „Andere“ dasjenige der Alterität. Man könnte es hier wagen, zu sagen, dass es das ganz „Andere“ ist, doch man muss gut aufpassen, denn die Theologen benennen auch Gott als das ganz Andere, und diese Vorstellung widerspricht Badiou in seinem Denken:

> Das Andere ist auf der einen Seite der Ort für die anderen-Gleichen, der Raum für die Anwendung (und die Ohnmächtigkeit der Regel). Auf der anderen Seite ist das Andere das, was keines der anderen ist und was die Regel nicht vollständig zu erfassen erlaubt. Es ist also *diejenige* Vielheit, die der Regel entzogen ist und die diese Regel, wenn sie sie erreichen würde, unterbräche. Das Andere stellt deutlich eine *Grenze* für die Regel dar.[184]

Folglich müsste es auf irgendeine Art und Weise außerhalb der Regel sein, denn es muss erstens erscheinen, das heißt, sich präsentieren, und es darf sich nicht durch

[181] BADIOU: SE, S 168.
[182] BADIOU: SE, S 168.
[183] BADIOU: SE, S 168.
[184] BADIOU: SE, S 169.

die Regel ergeben. Anders gesagt: Es ist unbedingt notwendig, dass es sich der Regel zeigt, aber es darf auf keinen Fall durch diese eingeholt werden. Das macht die Regel zu einer regionalen Regel. Aus diesem Grund kann das Andere Badiou zufolge als Grenze der Regel definiert werden.

Badiou erinnert im nächsten Schritt daran, dass eine unendliche Vielheit bzw. Menge eine präsentierte Vielheit ist, die einer Verfahrensweise entspricht, deren Anwendungsort und Grenze sie zugleich darstellt. Badiou betont mit Nachdruck, dass das Unendliche das Andere ist, das eine Regel ermöglicht, damit zwischen dem Schon und der Wiederholung des Noch eine Verbindung aufrechterhalten werden kann, „die aus den anderen Gleiche macht".[185] Aber das allein reicht auf keinen Fall aus, da man neben dem „Schon-da-sein" – dem absolut anfänglichen „Schon" als Ausgangsvielheit – auch noch unbedingt das Sein des Anderen, das sich nicht aus der Regel ergeben darf, benötigt. Basierend auf diesem doppelten Existenzsiegel wird das reale Unendliche vom Imaginären eines Eins-Unendlichen getrennt, welches ohne Vorbedingungen behauptet worden war.

Insofern sich die Prämisse bewahrheitet, dass das großgeschriebene Andere das Eins-der-Einheit ist, kann es nicht sein, dass das „Noch-Eins" diesen Auftrag hat. Das soll nicht heißen, dass Badiou gegen sein eigenes Noch argumentiert. Im Gegenteil: Er wehrt sich vielmehr gegen ein missverstandenes Noch im Sinne des Noch-Eins, das soll heißen im Sinne eines Eins, eines Etwas. Badiou jedenfalls lehnt den Begriff des „Einen" vehement ab, da man Gefahr laufen könnte, dieses Eins-der-Einheit in der Art zu verstehen, dass eine Einheit neben der anderen Einheit gesetzt werden könnte. In diesem Fall wäre das „Eins" ein bloß Seiendes, ein etwas. Dagegen versteht Badiou das „Eine" als das ontotheologisch Eine, welches er absolut verwirft. Insofern würde diese Verwerfung „des Einen" die Konsequenz mit sich ziehen, dass Badiou auch das „Eins" kritisieren müsste. Demgemäß könnte man sich hier die Frage stellen, ob dies ein polemischer Ausdruck ist oder sich aber auf die Beschreibung eines „Noch-Eins" bezieht.

Unabhängig davon realisiert das Unendliche die so „dringend" notwendige Vereinbarung zwischen einem Seinspunkt und einem zweiten Existenzsiegel, das eine Vorstellung untersagt, in der das Unendliche aus dem Endlichen hergeleitet werden kann. All seine vorangehenden Überlegungen führen ihn zu „einem" wichtigen Er-

---

[185] BADIOU: SE, S 169.

gebnis: „Im Unendlichen finden der Ursprung, das andere und das Andere zusammen.“[186]

Dies ist aber nur dann möglich, wenn die Beziehung von dem anderen und dem Anderen in beide Richtungen durchführbar ist. Der Weg vom anderen zum Anderen ist zum einen der „Ort“, an dem jedes andere durch das Andere präsentiert wird, und zwar auf die Weise wie das dem anderen zugehörige Gleiche. Zum anderen ist der Endpunkt des Weges vom Anderen zum anderen die „Grenze“, denn das Andere gehört nicht zu dem anderen. Anders gesagt: Das Andere kann nicht eines der anderen sein, die sich innerhalb der Regel befinden. Das Andere ist die Grenze von dem ganz anderen und gehört, da es sich außerhalb der Regel befindet, nicht mehr zum anderen dazu.

Daher wäre es für Badiou irrational, dass die Vorstellung, dass die Ableitung des Unendlichen aus dem Endlichen, möglich wäre und durch das zweite Existenzsiegel unterstützt werden würde. Badiou:

> Wenn man „endlich“ nennt, was durch eine Regel vollständig erfasst werden kann und was also an einem Punkt sein anderes als anderes subsumiert, dann ist klar, dass daraus nicht auf das Unendliche geschlossen werden kann, denn dieses fordert, dass das Andere woanders (aus keiner der betreffenden Regel) herkommt.[187]

Diese Aussage kann in Anbetracht einer früheren Aussage missverständlich wirken, insofern man hier nicht zwischen dem potentiellen und aktualen Unendlichen differenziert. Während das potentiell Unendliche geschichtlich anerkannt wurde, führte das absolut Unendliche quasi ein „Schattenleben“. Nun geht es aber genau um dieses, weshalb zwischen dem ersten und dem zweiten unterschieden werden muss. Dies könnte womöglich durch die Einführung eines neuen Terminus erfolgen, z.B.: das aktual Unendliche im Sinne des Badiouschen Unendlichen, dem ereignishaften Unendlichen oder vielleicht dem Unendlichen ohne Eins, welches vermutlich dem Badiouschen Denken am ehesten entgegenkommen mag.

[186] BADIOU: SE, S 169.
[187] BADIOU: SE, S 169.

Nun sieht sich Badiou dazu im Stande, die bereits zu Beginn formulierte Frage, ob das Sein als solches unendlich sei, in folgende zentrale These zu verwandeln:

> Die These der Unendlichkeit des Seins ist notwendig eine ontologische Entscheidung, ein Axiom. Ohne diese Entscheidung wird es immer möglich bleiben, dass das Sein wesentlich endlich ist.[188]

Das zeigt ein Wesentliches: Bereits die These von der Unendlichkeit des Seins ist eine ontologische Entscheidung. Also allein schon die These! Insofern könnte man in naiver Weise sagen, ob man sich dafür entscheidet oder aber dagegen. Badiou relativiert – vielleicht gerade deshalb – seinen ersten Satz, da er erkennt, dass diese Beliebigkeit eine Gefahr darstellt. Dennoch verhält es sich so, wie Badiou es formuliert hat: Wenn eine Unendlichkeit des Seins tatsächlich existieren soll, dann ist das nur durch eine bewusst getroffene Entscheidung möglich.

> Und diese Entscheidung haben die Menschen des 16. und 17. Jahrhunderts durch ihre Behauptung, die Natur sei unendlich, in der Tat gefällt.[189]

Das zeigt: Badiou versucht nicht zu deduzieren, ob es sinnvoll ist, dass diese Entscheidung getroffen wurde oder nicht. Er sagt nur, dass dies der Fall war. Das ist für Badiou das Ereignis. Hier ist nicht etwas passiert, dass notwendig geworden ist, denn es war der „reine Mut des Denkens", der willentlich dem ontologischen Finitismus sozusagen „ein Ende" gesetzt hat. Hier ist etwas aufgetreten, das der Regel nicht entspricht – das Ereignis. In Bezug darauf könnte hier eine „Schwäche" in Badious Denken vermutet werden, da für ihn Ereignisse in der Vergangenheit liegen. Zuerst muss das Ereignis eingetreten sein, damit er im Anschluss daran aufweisen kann, dass es tatsächlich ein Ereignis war, weil es keiner Regel entspricht. Es wäre Badiou zufolge ebenso möglich gewesen, dass die Menschen den ontologischen Finitismus weitergeführt und verteidigt hätten. Dieser historisch begrenzten Ontologie

[188] BADIOU: SE, S 169.
[189] BADIOU: SE, S 169.

könnte man dann die Fähigkeit zusprechen, uns zu zeigen, „was die einzige wirklich a-theologische Form der Aussage über die Unendlichkeit des Seins auf die Natur übertragen hat.“[190] Man vermag nicht auszusagen, was es war. Man kennt nur den eigenständig getroffenen Entschluss, dass eine unendliche natürliche Mannigfaltigkeit existiert. Badiou selbst vermeidet sorgsam den Verweis auf die Natur. Entscheidend und zugleich womöglich enttäuschend mag die Aussage erscheinen, dass er bloß eine natürliche unendliche Vielheit verlangt und gleichzeitig keine Definition für dieses Adjektiv „unendlich“ liefert. Badiou bietet „zum Trost“ zumindest eine andere sinnverwandte Formulierung an:

> Es existiert eine natürliche Vielheit, die so beschaffen ist, dass eine Regel mit ihr verbunden wird, aus der hervorgeht, dass es in jedem Moment ihrer Anwendung noch-ein-anderes gibt, wobei die besagte Vielheit keines dieser anderen ist, obgleich sie ihr alle zugehören.[191]

Die Herausforderung, einen Beweis hierfür zu erstellen, dass, wenn diese eine unendliche Vielheit existiert, auch noch andere, weitere existieren, lässt Badiou der Ontologie zukommen.

> So entwickelt sich die Architektur der historischen Entscheidung, die mögliche Unendlichkeit des Seins zu bewahren, eine Unendlichkeit, die sich, sobald sie dem Zugriff des Eins entzogen ist (…), vervielfältigt. Sie bezeichnet die bemerkenswerte Umkehrung des vorausgehenden Zeitalters des Denkens das Endliche seinerseits als eine Ausnahme (…), die uns in brüderlicher [und schwesterlicher; Anm.: EL] Ungewissheit hält.[192]

Abschließend lässt sich sagen, dass Badiou sich durch die Einführung und Bestimmung bzw. Umdeutung von Termini seiner Frage nach der Unendlichkeit des Seins mit Hilfe eines mathematischen, ontologischen und philosophischen Denkens genä-

[190] BADIOU: SE, S 170.
[191] BADIOU: SE, S 170.
[192] BADIOU: SE, S 170.

hert hat. So übt z.B. das Denken Cantors einen gewissen Einfluss auf Badious Gedankenwelt aus, insofern das Unendliche in Hinsicht auf die Mathematik vom Eins, das nicht ist, getrennt werden muss.

Badiou nimmt aber auch den einen oder anderen Gedanken von Aristoteles auf wie z.B. die Notwendigkeit einer Verlaufsregel. Das heißt in Zusammenhang mit Badiou, dass man neben dem „Schon“ und dem „Noch“ eine feste Regel benötigt.

Der wichtigste Punkt ist aber letztendlich, dass die These von der Unendlichkeit des Seins eine ontologische Entscheidung ist, die von den Menschen getroffen wurde.

2 Meditation 16 – Ereignisstätten und geschichtliche Situation. Oder: „Was nicht das Sein-als-Sein ist.“

Alain Badiou stellt sich in dieser Meditation der Frage, „was das Sein-als-Sein ist“ und wählt hierfür folgende Kategorien:

> Die Vielheit als allgemeine Form der Präsentation; die Leere als Eigenname des Seins; der Überschuss bzw. die Verfassung der Situation als repräsentative Verdoppelung der Struktur (bzw. Zählung-als-Eins) der Präsentation; die Natur als Form der Beständigkeit und der Homogenität des vielfältigen Da-stehens; schließlich das Unendliche, das die Ausdehnung der natürlichen Vielheit jenseits ihrer griechischen Grenze entscheidet[193]

Badiou stellt hier unter anderem die These auf, dass ein „Sein des Nichts“ existiert und definiert hierbei das Anormale, die Anti-Natur zum Einen als den Ort des anderen-als-das-Sein und zum Anderen als ein „Geschichtliches“. Dabei zeigt sich, dass jede geschichtliche Situation mindestens eine Ereignisstätte besitzt, während der natürlichen Situation eine solche fehlt. Eine Ereignisstätte dieser Art ist Badiou zufolge eine anormale Vielheit, die zwar präsentiert wird, aber kein Teil der Situation ist.

[193] BADIOU: SE, S 199.

Gegenstand der Situation ist dabei alles, was in Worte gefasst werden kann. Des Weiteren ist sie selbst Element der Situation. In diesem Zusammenhang ist das Ereignis sowohl Element der Situation als auch nicht. Wie einst Gödel stehen wir hier vor einem Widerspruch, der sich auf den ersten Blick nicht aufzulösen vermag.

Die Ereignisstätte liegt nach Badiou am Rand der Leere, die als Ereignisort für das Ereignis gilt. Der Begriff der Ereignisstätte ist weder intrinsisch noch absolut. Vielheiten können im Rahmen einer Situation „besonders“ oder „natürlich“ sein. Während die natürliche, normale Vielheit absolut ist, wird die besondere, geschichtliche Vielheit relativ genannt: Die Natur ist demnach absolut, die Geschichtlichkeit relativ. Für die Existenz der Geschichtlichkeit ist jedoch die Existenz einer Ereignisstätte unerlässlich.

Um aber Badious Gedankengänge gut verfolgen zu können, ist es zunächst hilfreich, ein paar grundlegende Begriffe zu definieren:

> [a] „Die *Vielheit* [Hervorhebung, EL] ist das Regime der Präsentation, das Eins ist, im Hinblick auf die Präsentation, ein operatives Resultat (ein Rechenergebnis). Das *Sein* [Hervorhebung, EL] ist das, was (sich) präsentiert, wobei es aus diesem Grunde weder Eins ist (denn allein die Präsentation selbst ist für die Zählung-als-Eins relevant), noch Vielheit (denn die Vielheit ist das Regime, das *nur* über die Präsentation herrscht)“.
>
> [b] „Ich [Badiou; Anm.: EL] nenne *Situation* jede präsentierte Vielheit. Ist die Präsentation wirklich, dann ist eine Situation der Ort ihres Stattfindens, unabhängig davon, wie die Terme der betroffenen Vielheit beschaffen sind“.
>
> [c] „Jede Situation lässt einen Operator der Zählung-als-Eins zu, der ihr eigen ist. Dies ist die allgemeinste Definition einer *Struktur*, nämlich dasjenige zu sein, was einer präsentierten Vielheit das Gesetz der Zählung-als-Eins vorschreibt“.[194]

[194] BADIOU: SE, S 38.

Mit der Frage „was nicht das Sein-als-Sein ist“ steht Badiou vor einer immensen Herausforderung, der sich in der einen oder anderen Form schon Philosophen vor ihm, wie z.B. Heidegger, widmeten. Er qualifiziert in diesem Zusammenhang Heideggers These, dass das Was-nicht-das-Sein-ist als negativen Gegenpol zu definieren, als beachtenswert, denn „für Heidegger ist in der Tat die φύσις das, was das Kunstwerk – und dieses allein – zum Aufscheinen bringt“.[195]

Heidegger stellt das Kunstwerk im Sinne der τέχνη in engste Verbindung mit der Natur als φύσις, denn „das Werk der Kunst ist (…) [ein; Anm.: EL] Er-wirken (…), worin als dem Erscheinenden das waltende Aufgehen, die φύσις, zum Scheinen kommt.“[196] Gleichzeitig eröffnet das Kunstwerk, dass man nur durch „alles, was anders erscheint“ einen Zugang zu dem „das nicht zählt […] als ein Nichts“.[197] Daraus kann man den Schluss ziehen, dass das als φύσις gedachte Sein das „Beständige des Dastehens“ nicht mit dem Nichts koextensiv ist, dass auf Grund seiner Isoliertheit tot ist. Eben deshalb ist es unbedingt erforderlich, Kenntnisse darüber zu haben, dass Heidegger „die Stellung des Nichts, des Was-nicht-das-Sein-ist, [zurückführt; Anm.: EL] auf das „Walten“ der φύσις“[198] und er bestimmt innerhalb dessen das Nichts als einen trägen

> Rückfall des Erscheinens, die Nicht-Natur, deren Höhepunkt, in der Epoche des Nihilismus, durch die Aufhebung jedes natürlichen Erscheinens in der gewalttätigen und abstrakten Herrschaft der modernen Technik erreicht wird.[199]

Heidegger zufolge liegt die Wurzel des „Nihil“ im Fernbleiben der Wahrheit des Seins ungeachtet der Erscheinung des Seienden. Innerhalb dieses Rahmens ist das Nichts kein aus sich selbst heraus Seiendes, auch nicht die Verneinung eines solchen und nie und nimmer ist es ein „nichtiges Nichts“. Wohl aber scheint das Nichts, so Heidegger,

---

[195] BADIOU: SE, S 199.
[196] HEIDEGGER, Martin : Einführung in die Metaphysik / von Martin Heidegger . - 2. Aufl . Tübingen : Niemeyer, 1958, S 122.
[197] BADIOU: SE, S 199.
[198] BADIOU: SE, S 199.
[199] BADIOU: SE, S 199.

> „das Nichtigste zu sein, dem, kaum daß es auch nur mit Namen genannt wird, zuviel Ehre angetan ist“ (…), aber indem es in „ungemeinen“ Erfahrungen begegnet, wird deutlich, daß es mit dem Nichts nicht nichts ist.[200]

Obgleich zunächst so manche mutmaßlichen Berührungspunkte zwischen Heidegger und Badiou ausgemacht werden können, lässt sich bereits erahnen, dass Badious Denken von einer anderen differenten Vorstellung geleitet wird, die sich in der These zeigt, dass ein „Sein des Nichts“ existiert.

Badiou behält sich in diesem Zusammenhang aber auch das Recht vor, auf Heideggers Behauptung, dass der „Ort des Denkens des „Was-nicht-das-Sein-ist“ die Nicht-Natur ist, dasjenige also, was sich *anders* als die natürlichen (beständigen oder normalen) Mannigfaltigkeiten präsentiert“,[201] nicht näher einzugehen, und definiert des Weiteren das Anormale, die Anti-Natur, als den Ort des anderen-als-das-Sein und gleichzeitig als ein „Geschichtliches“, das vollständig in der Unbeständigkeit des Besonderen liegt.

Hierbei ist es besonders wichtig, dass eine geschichtliche Situation mindestens eine Ereignisstätte hat, – wobei die Geschichtlichkeit ein lokales Merkmal ist – während im Vergleich hierzu die natürliche Situation ereignislos ist. Badiou zufolge vermögen wir bloß die Geschichtlichkeit, aber nicht die *eine* Geschichte zu denken.

> Die praktischen – politischen – Konsequenzen dieser Auffassung sind beträchtlich, denn sie führen zu einer Differentialtopologie der Handlung. Ein Umsturz, dessen Ursprung eine Verfassung der Gesamtheit wäre, ist eine imaginäre Vorstellung. Jede radikale Handlung der Transformation hat ihren Ursprung *in einem Punkt*, der – im Inneren einer Situation – eine Ereignisstätte darstellt.[202]

Badiou führt in der Meditation 17 die Französische Revolution als ein Beispiel an. Er fragt sich dabei, was unter diesen beiden Worten zu verstehen ist.

[200] Historisches Wörterbuch der Philosophie, Band 5, S 834.
[201] BADIOU: SE, S 199.
[202] BADIOU: SE, S 202.

> Man kann sicher sagen, dass das Ereignis „Französische Revolution" aus allem, was seine Stätte zusammensetzt – also etwa das Frankreich von 1789 bis 1794 – Eins macht. Hier finden Sie die Wahlmänner der Generalstände, die Bauern der „Großen Angst", die Sansculotten der Städte, das Personal des Konvents, die Jakobinerklubs, die Soldaten der Massenaushebung, aber ebenso die Lebensmittelpreise, die Guillotine, die Wirkungen der Tribüne, die Massaker, die englischen Spione, die Aufständischen der Vendée, die Assignaten, das Theater, die *Marseillaise* usw. Der Historiker schließt in das Ereignis „Französische Revolution" alles mit ein, was die Epoche an Spuren und Tatsachen liefert.[203]

Die Einführung des Begriff „geschichtlich" ist meiner Ansicht nach äußerst klug gewählt, da man Badiou zufolge die Geschichte als Ort des Politischen festlegen kann, nämlich als eines, wo etwas aufbricht, das im eigentlichen Sinne nicht „schon da" ist. „Ich [Badiou; Anm.: EL] nenne *geschichtlich*, was auf diese Weise als der Natur gegenüberstehend bestimmt wird."[204]

2.1 Geschichte versus Natur. Oder: „Was ist das Anormale?"

Alain Badiou entwickelt in der Meditation 8 eine Typologie des Mannigfaltigen, die ihm ermöglicht, zwischen den besonderen (singulären) und den normalen Mannigfaltigkeiten in der Hinsicht zu differenzieren, in der erstere zwar präsentiert aber nicht repräsentiert, letztere hingegen sowohl präsentiert als auch repräsentiert werden. Solche Vielheiten gehören der Situation an, ohne von dieser eingeschlossen zu werden. Sie sind Elemente, aber keine Teile.

> Exkurs: Badiou zufolge kann irgendetwas nur dann einer Situation zugehören, wenn es auf der Basis seiner Struktur als Eins gezählt werden kann. Des Weiteren vertritt er die Position, dass eine Präsentation zum einen durch die vorangehende Zählung als Vielheit überhaupt erst denkbar wird und zum anderen, dass ohne den Effekt der

[203] BADIOU: SE, S 206f.
[204] BADIOU: SE, S 199.

Zählung – der Struktur – keine Situation existiert. Die Konsequenz daraus zeigt sich in dem Sinne, dass Badiou die Vielheit einerseits als Präsentation und andererseits als Zusammensetzung der Zählung – basierend auf der Struktur – aufspaltet.

Während auf der Basis der ersten Zählung-als-Eins – der Struktur – die Einsen Vielheiten (uns-multiples) bzw. die konsistenten Mannigfaltigkeiten durch die Terme im Inneren der Situation definiert werden, muss der Begriff „Teil" erst im Sinne Badious festgelegt werden. Ein „Teil" ist nach Badiou eine Zusammensetzung aus Vielheiten, die – unter dem Zeichen des Eins – auf einer grundlegenden Struktur basieren. Anders formuliert: „Ein Teil ist eine Teil-Vielheit, eine „Teilmenge".„[205] Er fordert in diesem Zusammenhang, dass „eine Vielheit (…) ihrerseits Vielheit von Vielheiten [ist; Anm.: EL]."[206]

Die Konsistenz der Präsentation fordert eindringlich, dass jede Struktur von einer Metastruktur gedoppelt werden muss, denn „was ist beständiger als etwas, das als Vielheit zweimal an seinem Ort gezählt wird, einmal durch die Situation und einmal durch deren Verfassung?"[207] Die Konsequenz, die aus der doppelten Struktur einer jeden Präsentation folgt, ist, laut Badiou, dass Präsentation und Repräsentation immer zugleich existieren, wobei eine konsistente Vielheit zur Situation gehört und darin präsentiert wird, eine Teilmenge aber – als Zusammensetzung solcher Vielheiten – in ihr eingeschlossen wird.[208]

Für ein besseres Verständnis des Terminus Einschluss zitiere ich an dieser Stelle Badious Definition desselben:

> – Eine Menge β ist in einer Menge α eingeschlossen, wenn alle Elemente von β auch Element von α sind. Diese Relation wird $\beta \subset \alpha$ geschrieben und „β ist in α eingeschlossen" gelesen. Man sagt auch, dass β eine „Teilmenge" (*englisch subset*) oder ein „Teil" von α ist.

[205] BADIOU: SE, S 116.
[206] BADIOU: SE, S 148.
[207] BADIOU: SE, S 148.
[208] In Bezug darauf bestimmt Badiou die Normalität als das am besten Geeignetes um die größtmögliche Verbindung zwischen Zugehörigkeit und Einschluss zu deuten.

> – Wir sagen, dass ein Term in einer Situation eingeschlossen ist, wenn er ein Teil von ihr ist. Er wird sodann von der Verfassung* der Situation als Eins gezählt*. Der Einschluss verweist auf die Repräsentation (durch die Verfassung). [209]

Er unterscheidet nunmehr die Präsentation von der Repräsentation in dem Sinne, dass die Präsentation einer Vielheit davon abhängt, ob sie in einer Situation als Eins gezählt werden kann. Im Vergleich dazu spricht er von einer Repräsentation einer Vielheit dann, falls diese auch von der Metastruktur bzw. der Verfassung der Situation als Eins gezählt wird. „Das bedeutet, dass sie [die Vielheit; Anm.: EL] zur Situation gehört (Präsentation) und zugleich von ihr eingeschlossen wird (Repräsentation). Sie ist zugleich Term und Teil.“[210]

In der Meditation 16 richtet Badiou seine Aufmerksamkeit auf einen ähnlichen Weggedanken:

> Zu sagen, dass eine präsentierte Vielheit nicht zugleich ein Teil der Situation ist, bedeutet notwendig, dass einige der Vielheiten, aus denen diese Vielheit zusammengesetzt ist, ihrerseits keine Terme der Situation sind. Denn wenn *alle* Terme einer präsentierten Vielheit selbst in der Situation präsentiert werden, dann ist die Sammlung dieser Terme, also die Vielheit selbst, ein *Teil* der Situation und wird folglich von der Verfassung gezählt. Oder anders gesagt: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Vielheit zugleich präsentiert und repräsentiert wird, ist, dass alle ihre Terme ihrerseits präsentiert werden.[211]

Als Muster für eine in der Situation präsentierten und repräsentierten Vielheit, zeichnet Badiou das Bild einer französischen Familie, die sich insofern präsentiert als sie zusammenwohnt und ihre Freizeit gemeinsam verbringt. Diese Familie wird zugleich dadurch repräsentiert, dass alle Mitglieder offiziell gemeldet sind und die französische Staatsbürgerschaft vorweisen können.

[209] BADIOU: SE, S 539.
[210] BADIOU: SE, S 119.
[211] BADIOU: SE, S 200.

An dieser Stelle ist es nun erforderlich, zugleich auf den von Badiou selbst bewiesenen Überschusssatz der Ontologie zu verweisen, der aussagt,

> dass es im Rahmen der reinen Theorie der Vielheit (der Mengenlehre) formal unmöglich ist, dass, ganz gleich in welcher Situation, *alles*, was in ihr eingeschlossen ist (jede Teilmenge), ihr auch zugehört. Es besteht ein unausweichlicher Überschuss an Teilmengen gegenüber den Termen.[212]

Die Anwendung dieses Satzes besagt, dass die Zugehörigkeit einer konsistenten Vielheit sich in ihrer Präsentation und Existenz zeigt. Gleichzeitig stellt dieser aber auch fest, dass es immer Teilmengen gibt, die, obgleich ihres Einschlusses als Zusammensetzung von Vielheiten innerhalb der Situation, nicht gezählt werden können und daher nicht existieren. Demnach ist es nach Badiou de facto möglich,

> dass ein Term in der Situation nur durch eine Vielheit, der er zugehört, präsentiert wird, ohne dabei selbst unmittelbar eine Vielheit dieser Situation zu sein. Dieser Term fällt unter die Zählung-als-Eins der Präsentation (denn er ist gemäß der Eins-Vielheit, der er zugehört), aber er wird nicht gesondert als-Eins-gezählt. Solche Terme werden durch ihre Zugehörigkeit zu einer Vielheit singularisiert.[213]

Wie bereits am Anfang dieses Kapitels dargelegt wurde, lässt jede Situation einen Operator der Zählung-als-Eins zu, wobei jede präsentierte Vielheit dem Gesetz der Zählung-als-Eins unterworfen ist. Badiou zufolge ist es ein *ungeschriebenes Gesetz* [Hervorhebung, EL], dass vor der Zählung-als-Eins nichts ist, da alles gezählt wird. Gerade dieses Nicht-Sein ermöglicht aber, dass die Gesamtheit der Einsen-Zusammensetzung existiert, indem der Vollzug der Präsentation stattfindet. Eine Situation muss demnach als etwas gedacht werden, das sich nur in einer aus Einsen gewebten Vielheit offenbart. Hierfür benötigt man zugleich das *Gesetz der Gesetze*

[212] BADIOU: SE, S 117.
[213] BADIOU: SE, S 200.

[Hervorhebung, EL], das besagt, dass es nichts gibt, das dem Effekt der Zählung eine Schranke setzt. Da also die Zählung-als-Eins vor allem anderen ist, kann eine Präsentation als Vielheit erst nachfolgend gedacht werden, womit sich nach Badiou die numerische Beständigkeit – die Trägheit [*inertie*] – der Situation erst einstellen kann. Ihm zufolge ist es ein Faktum, dass, basierend auf das Eins einer Operation, behauptet werden darf,

> dass die Domäne der Operation nicht Eins ist (denn das Eins *ist nicht*) und dass sie also Vielheit ist, insofern das, was *in der Präsentation* nicht Eins ist, notwendig Vielheit ist. Denn die Zählung-als-Eins (die Struktur) erzeugt die Allgemeingültigkeit des Paares Eins/Vielheit für jede Situation. Was als Eins gezählt worden sein wird, weil es nicht Eins gewesen ist, erweist sich als Vielheit.[214]

Entsprechend kann man behaupten – insofern die Zählung-als-Eins innerhalb der Situation immer ein *Ergebnis* [Hervorhebung, EL] ist –, dass die Präsentation ihrer selbst bezüglich der Zählung als Vielheit existiert. Aber: Badiou weist in der Meditation 8 darauf hin, dass die Zählung-als-Eins selbst als Eins gezählt werden kann und auch wird, das meint das Eins des Einseffekts selbst. In Folge reicht es einerseits nicht aus, die Metastruktur allein als Zählung der Terme der Situation zu bestimmen, da sie in diesem Fall von der Struktur bzw. der Zählung-als-Eins nicht abgrenzbar wäre. Andererseits ist die Definition der Metastruktur als bloße Zählung der Zählung nicht ausreichend, denn dies hätte zur Folge, dass diese Definition lediglich als ein Endergebnis aus den Operationen der Verfassung verifiziert werden kann. Denn:

> Eine Struktur ist ja gerade kein Term der Situation und daher lässt sie sich als solche nicht zählen. Sie verbraucht sich in ihrem Effekt, welcher darin besteht, dass es Eins gibt.[215]

[214] BADIOU: SE, S 38.
[215] BADIOU: SE, S 115.

Ausgehend von dem Gedanken, dass ein Term tatsächlich innerhalb der Situation nur durch seine Zugehörigkeit zu einer Vielheit präsentiert wird und unter die Zählung-als-Eins fällt – ohne selbst als eine Vielheit dieser Situation zu existieren – werden solche Terme als zu einer Vielheit zugehörig singularisiert. So kommt Alain Badiou Schritt für Schritt zu folgender Einsicht:

> Es ist vernünftig, das Anormale bzw. die Anti-Natur – das heißt also die Geschichte – als Omnipräsenz der Singularität zu denken, in der gleichen Weise, wie wir die Natur als Omnipräsenz der Normalität gedacht haben. Die Vielheit-Form der Geschichtlichkeit ist dasjenige, was vollständig in der Unbeständigkeit des Besonderen liegt, das also, worauf die Metastruktur der Verfassung keinen Einfluss hat.[216]

Badiou nennt diesbezüglich eine vollkommen anormale Vielheit, die in ihrer Beschaffenheit keines ihrer Elemente innerhalb der Situation präsentiert, eine *Ereignisstätte*.

Exkurs: Das Nichts und die Leere

1 Die Suche nach dem Nichts als Name der Leere

Vergleichbar mit dem Denken Martin Heideggers handelt es sich auch bei Alain Badiou nicht um ein *nichtiges Nichts*, sondern um ein *wirksames Nichts*. Er ist von der These überzeugt, „dass es ein Sein des Nichts – als Form des Unpräsentierbaren – gibt."[217] Gleichzeitig hält er die Suche nach dem Nichts nicht nur als nicht vielversprechend, sondern er führt darauf sogar die „Schwäche der Poesie" zurück, die diesen Weg zu gehen versucht, weswegen er sie als Komplizin des Todes verurteilt. Im Einvernehmen mit Platon tragen Badiou zufolge die Dichter durch die Propaganda ihrer „Idee einer Anschauung des Nichts" die Verantwortung dafür, dass man bislang lediglich zu sagen vermag, dass „jede Situation (…) das Nichts ihrer Gesamtheit [impliziert;

[216] BADIOU: SE, S 200.
[217] BADIOU: SE, S 71.

Anm.: EL]".[218] Mehr noch: Dieses Nichts – so verfügen die Dichter – soll das Sein bewohnen,

> obwohl es für diese Bleibe nicht einmal eine Stätte gibt – oder wie sie es nennen: eine Natur –, denn alles ist konsistent. (…) Aber das Nichts ist weder ein Ort noch ein Term der Situation.[219]

Badiou ist der Überzeugung, dass das Nichts nur ein Term sein kann, wenn es als Eins gezählt wird. Doch da alles Zählbare in der Konsistenz der Präsentation ist, kann das Nichts – als ein „von der Präsentation Unentscheidbares" – kein Term sein. Hieraus schließt er letztlich: „Es gibt nicht *ein* Nichts, es gibt »Nichts«, als Phantom der Inkonsistenz."[220]

Den Seinstatus des Nichts definiert er derartig, dass er vom Nichts behauptet, dass es durch sich selbst der „Name der Nichtpräsentation in der Präsentation" ist.

> Exkurs: Interessant ist an dieser Stelle, dass Badiou zwischen dem „Nichts" an sich und dem „Namen des Nichts" als „Namen der Nichtpräsentation in der Präsentation" differenziert, denn dieses Vorgehen kann man bereits in der biblischen Tradition des Alten Testaments erkennen.
>
> Im Alten Testament tritt Gott unter verschiedenen Namen auf, wie z.B. El, Elohim, Jahwe und Schaddai. In Exodus 3,13ff offenbart Gott seinen Namen Moses, der ihn dem Volk Israels weitergibt und zum Zentrum ihres religiösen Lebens wird.
>
> > Da sagte Mose zu Gott: Gut, ich werde also zu den Israeliten kommen und ihnen sagen: Der Gott eurer Väter hat mich zu euch gesandt. Da werden sie mich fragen: Wie heißt er? Was soll ich ihnen darauf sagen? Da antwortete Gott dem Mose. Ich bin der „Ich-bin-da". Und so fuhr er

218 BADIOU: SE, S 71.
219 BADIOU: SE, S 71.
220 BADIOU: SE, S 71.

> fort: So sollst du zu den Israeliten sagen: Der „Ich-bin-da“ hat mich zu euch gesandt.[221]

> Auf Grund der engen Verbindung zwischen der „Person“ und dem Namen Jahwes kann dieser im Normalfall als Stellvertreter für Jahwe – quasi im Sinne eines Doppelgängers – selbst angewendet werden. Des Weiteren ist es interessant, sich damit zu beschäftigen, dass der Name Jahwes oft gleichzeitig in seinem geschichtlichen Handeln an seinem Volk als Selbstinterpretation interpretiert wird. Aus diesem Grund kann Gott durch die Erzählungen seines Handelns von seinem „Gottesvolk“ narrativ erfahren werden: „Ich bin Jahwe dein Gott, der dich aus Ägypten geführt hat, aus dem Sklavenhaus.“[222]

Badious eigene Differenzierung zwischen dem Nichts und dem Namen des Nichts führt in zu folgendem Verdacht: Erhält man als Ergebnis einer Operation Eins, dann kann „etwas“, das kein Term-in-der-Situation und also nichts ist, nicht gezählt worden [sein; Anm.: EL]“[223] Aber genau dieses „Etwas“ braucht man zweifelsohne, damit die Durchführung der Operation der Zählung-als-Eins überhaupt erst durchführbar wird. Badiou zufolge kann man dies folgendermaßen definieren: „[D]ass das Nichts die Operation der Zählung ist (…) oder zu sagen, dass das Nichts die reine Vielheit ist.“[224] Seine Überlegung geht in die Richtung, dass man hier nun vor dem „der Situation eigenen Nichts“ bzw. vor dem leeren und lokal undefinierbaren Punkt steht, der nach Badiou bewahrheiten soll, dass „die Situation mit dem Sein vernäht ist, dass *das, was* sich präsentiert“[225] sich innerhalb der Präsentation befindet. Für diese Vernähung einer Situation mit ihrem Sein führt er nun den Begriff der Leere ein, dem er gegenüber dem Begriff des Nichts den Vorrang zuspricht, und zwar deshalb, da das Nichts eher die Leere bezeichnet.

---

[221] Die Differenzierung zwischen Jahwe und dem Namen Jahwes findet auch an anderen Stellen des Alten Testaments statt: Ex 6,3: Ich bin Abraham, Isaak und Jakob als El-Schaddai (Gott, der Allmächtige) erschienen, aber unter meinen Namen Jahwe habe ich mich ihnen nicht zu erkennen gegeben. Jes 42,8: Ich bin Jahwe, das ist mein Name. Jes 52,6: Darum soll mein Volk an jenem Tag meinen Namen erkennen und wissen, dass ich es bin, der sagt: Ich bin da.
[222] Ex 20,2.
[223] BADIOU: SE, S 71.
[224] BADIOU: SE, S 72.
[225] BADIOU: SE, S 72.

1.1 Die Leere als Eigenname des Seins

Die Gefahr der Leere lauert in jeder Vielheit-Präsentation und zwar aus dem Grund, da die Leere, „die in der Situation (also unter dem Gesetz der Zählung-als-Eins) der Name der Inkonsistenz ist, selbst nicht präsentiert bzw. festgelegt werden kann."[226]

Alain Badiou zufolge wäre die Zusammenkunft zwischen der Präsentation und ihrer eigenen Leere katastrophal, weshalb die Situation vor der Leere Schutz suchen muss. Sein Verbot der Festlegung der umherirrenden Leere kann nicht bloß auf die Konsistenzgarantie [das »Es gibt Eins«; Hervorhebung, EL] beharren, da die alleinige Berufung auf die bloße Struktur – der Zählung-als-Eins – keineswegs hinreichend ist. Nach Badiou basiert die Unzulänglichkeit darauf, „dass sich *etwas* in der Präsentation der Zählung entzieht, und das ist gerade die Zählung selbst."[227] Das rein operative Resultat „Es gibt Eins" führt zur Transparenz der Operation. Dies ermöglicht gegebenenfalls, dass die unstrukturierte Struktur – der Zählung-als-Eins entzogen – zum Punkt der Leere führen kann. Eben deswegen zieht Badiou den Schluss, dass eine strukturierte Struktur existieren muss, um das Verbot der Leere der Präsentation einführen zu können, damit für das „Es gibt Eins" die Zählung-als-Eins als verbindlich erklärt werden kann.

„Die Konsistenz der Präsentation fordert also, dass jede Struktur von einer Metastruktur gedoppelt wird, welche sie jeder Festlegung der Leere verschließt."[228] Die Angst vor der Leere zeigt sich insofern, als im Rahmen jeder Situation die Struktur der Zählung als Beweis der Vollständigkeit des Zählvorganges verdoppelt wird, zu dem Zweck, dass das Eins fortwährend in dieser unauffindbaren Gefahr der Leere fortbestehen kann. Badiou schließt daraus:

> Jede Operation der Zählung-als-Eins (der Terme) wird auf gewisse Weise durch eine Zählung der Zählung gedoppelt, welche in jedem Moment darüber wacht, dass der Abstand zwischen der konsistenten Vielheit (als Resultat der Einsen-Zusammensetzung) und der inkonsistenten Vielheiten (die nur die Voraussetzung der Leere ist und nichts präsentiert) wirklich gleich null ist und dass sich also niemals jenes Desaster der Präsen-

[226] BADIOU: SE, S 113.
[227] BADIOU: SE, S 113.
[228] BADIOU: SE, S 113.

> tation ereignen kann, welche das (verquere) Vorkommen der eigenen Leere wäre.[229]

Durch die Struktur der Struktur, die gegen die drohende Leere kämpft, wird festgelegt, dass das Eins in der Situation ist. Badiou zufolge braucht man, um zu zeigen, dass die Struktur ihrerseits fest im Eins fixiert wird, unbedingt das Umherirren der Leere. Die Leere erweist sich darin weder als lokal noch als global, weshalb es ausgeschlossen ist,

> dass die Leere *ein* Term ist (denn sie ist die Idee dessen, was von der Zählung abgezogen wird), noch dass sie das Ganze ist (denn sie ist ja gerade das Nichts dieses Ganzen). Wenn es eine Gefahr der Leere gibt, dann ist sie weder eine lokale Gefahr (im Sinne *eines* Terms) noch eine globale Gefahr (im Sinne der strukturierten Vollständigkeit der Situation).[230]

Eben deshalb gibt Badiou dem Begriff der Leere den Vorrang, da dieser mit dem „globalen Effekt der Struktur" verflochten ist und er auf einfache Weise zeigt, dass „das Nicht-gezählt-worden-Sein" deshalb nicht lokal ist, das es „nicht als Eins gezählt" wird. Badiou kommt zur folgenden Überzeugung:

> Der Name, den ich wähle, die Leere, bezeichnet in exakter Weise, dass nichts (kein Term) präsentiert wird und dass zugleich die Bezeichnung dieses Unpräsentierbaren sich „im Leeren" [*à vide*] vollzieht, das heißt ohne denkbare strukturale Verortung.[231]

Des Weiteren ist es wichtig, zu erkennen, dass im Rahmen einer Situation kein Term die Leere benennt und man nicht einmal sagen kann, dass die Leere sei und wo sie

[229] BADIOU: SE, S 114.
[230] BADIOU: SE, S 115.
[231] BADIOU: SE, S 73.

sei, denn im Inneren einer Situation besteht zu keiner Zeit die Möglichkeit, eine Begegnung mit der Leere fassbar machen.

2.2 Die Ereignisstätte

2.2.1 Die Ereignisstätte am Rand der Leere

Alain Badiou bezeichnet, wie bereits eröffnet, eine vollkommen anormale Vielheit eine *Ereignisstätte*.

> Die Stätte selbst ist präsentiert, doch „unter" ihr wird nichts von dem, was sie zusammensetzt, präsentiert, so dass sie kein Teil der Situation ist. Ich werde von einer solchen Vielheit – der Ereignisstätte – auch sagen, dass sie *am Rand der Leere* liegt bzw. dass sie *grundlegend* ist.[232]

Zur näheren Erläuterung wählt Badiou das bereits oben angeführte Beispiel einer französischen Familie, wobei er jetzt eine entscheidende Änderung dieses Bildes vornimmt. Ihm zufolge leben nun alle Familienmitglieder im Untergrund und zwar insofern als keiner von ihnen die französische Staatsbürgerschaft nachweisen kann und somit keine repräsentierte Vielheit darstellt. Diese Familie präsentiert sich daher ausschließlich bei in der Öffentlichkeit stattfindenden Tätigkeiten bzw. Auftritten als Familie.

> Eine solche Vielheit wird letztlich *nur* als die Vielheit-die-sie-ist präsentiert. Keiner ihrer Terme wird als solcher als-Eins-gezählt, allein die Vielheit dieser Terme ergibt Eins.[233]

Eine Situation kann vereinfacht gesagt als jenes beschrieben werden, worin man sich *befindet*. Sie ist selbst Element der Situation, weshalb es nicht um Elemente gehen kann, die der gleichen Struktur angehören und dennoch „Trümmer" sind, sondern:

[232] BADIOU: SE, S 200f.
[233] BADIOU: SE, S 201.

Gegenstand ist all das, was man in Worte fassen kann. Damit ist dasjenige gemeint, was zum „Hier“ gehört und zugleich zur Situation. Dementsprechend kann man behaupten, dass die Situation alles ist. An dieser Stelle kommt Badious Ereignisbegriff zur Anwendung und zwar in der Beziehung, dass das Ereignis sowohl Element der Situation ist als auch nicht. Der Grund dafür liegt seiner Meinung nach zum einen darin, dass, wenn es ein Ereignis gibt, dieses nur in Erscheinung im Rahmen einer Situation auftreten kann [Damit meint man innerhalb eines Kontextes; Anm.: EL]. Zum anderen ist es nach Badiou denkbar, dass das Ereignis durchaus auf eine – vielleicht unerwartete – Art und Weise in Erscheinung treten kann. Infolgedessen gelangt Badiou zu dem Resultat, dass das Ereignis sich einerseits aus der Situation und andererseits aus dem Ergebnis zusammensetzt.

Aber was versteht nun Badiou genau darunter, wenn er behauptet, dass die Ereignisstätte am Rand der Leere liegt? Nach seiner Meinung gilt, dass, wenn es ein Ereignis gibt, dieses eher selbst eine Leere ist. Somit muss sich Badiou nun zwei Fragen stellen: Zum einen „Was ist eine Leere?“ und zum anderen „Wie kann ich ein Loch definieren?“

Während die erste Frage bereits an früherer Stelle beantwortet wurde, kommt Badiou in Bezug auf die zweite zu der Überlegung, das Loch über dessen Rand zu definieren. Das meint: Um von einem Loch zu sprechen, muss man über dessen Rand reden. In diesem Kontext erweist sich dieser Rand als die Stätte bzw. als einen Ereignisort an dem das Ereignis eintritt.

Im Hinblick auf die Situation findet Badiou zufolge kein Bruch statt, denn: Wenn man entlang der Linie – dem Rand – geht, folgt hinter jedem Punkt genau ein Punkt ohne dass es zwischen diesen beiden ein Loch gibt. Greift man aber auf die reellen Zahlen zurück, so zeigt sich, dass zwischen zwei Punkten stets unendlich viele andere Punkte liegen, weshalb zwischen diesen ein unübersichtliches Loch klafft. Da aber die Distanz gleich null ist – also wenn wie in diesem Fall der Limes gegen unendlich geht und somit sich der Null angleicht – gibt es doch einen Bruch in der Kontinuität, den man Badiou zufolge – sofern man dies möchte – jedes Mal aufs Neue ignorieren kann.

Damit meint er, dass jemand, der das Ereignis nicht sehen will, selbst hier eine absolute Kontinuität nachweisen kann. Aber genau an dieser Stelle kann man die Behauptung aufstellen, dass eben keine Kontinuität existiert, sondern dass an diesem Punkt ein Loch mit einem Ereignis in der Mitte stattfindet. Für diese These kann Badiou allerdings keinen Beweis an Ort und Stelle liefern, denn dieser müsste auf der Ebene der Situation eingeführt werden. Auf dieser Ebene der Situation aber gibt es das Ereignis nicht. Gleichzeitig gilt, dass das Loch nicht beliebig verortet ist, sondern etwas, das genau da *ist* und Badiou meint, dass dieses „genau-da“ mit der Ereignisstätte identifiziert werden kann. Aus all dem schließt er, dass das Einzige, worüber man sprechen kann, der Ort ist, an dem das Ereignis eine Stätte hat, sofern ein Ereignis überhaupt existiert.

In diesem Sinn kommt Badiou nach weiteren Überlegungen – von denen manche bereits dargelegt wurden – zu folgendem Fazit:

> Dass man von einer Ereignisstätte sagen kann, sie sei „am Rand der Leere“, wird einsichtig, wenn man daran denkt, dass diese Vielheit vom Punkt der Situation aus gesehen allein aus nicht präsentierten Vielheiten besteht. Unmittelbar „unter“ dieser Vielheit – das heißt wenn man die Vielheiten-Terme betrachtet, aus denen sie sich zusammensetzt – gibt es *nichts*, denn keiner ihrer Terme wird als-Eins-gezählt. Eine Stätte ist also das annehmbare *Minimum* der Wirkung der Struktur. Sie ist so beschaffen, dass sie zur Situation gehört, dass aber dasjenige, war ihr zugehört, nicht mehr zur Situation gehört.[234]

Daraus schließt Badiou in weiterer Folge, dass eine Ereignisstätte am Rand der Leere als grundlegend definiert werden kann, und er erklärt eine solche Vielheit für den Effekt der Zählung als minimal. Eine solche Vielheit kann folglich in konsistente Zusammensetzungen eintreten und somit ihrerseits Vielheiten, die innerhalb der Situation als-Eins-gezählt werden, zugehören.

> Die Randwirkung, durch die diese Vielheit die Leere berührt, besteht darin, dass die Konsistenz (die Eins-Vielheit) sich nur aus dem zusammensetzt, was vom Standpunkt der Situation aus gesehen der Zählung ent-

[234] BADIOU: SE, S 201.

> zogen und somit inkonsistent ist. In der Situation ist diese Vielheit, aber das, *wovon* sie Vielheit ist, ist nicht.[235] [sic]

In dieser präsentierten Vielheit kann nichts präsentiert werden, was ihr selbst zugehört, da sie sich nicht aus einer Strukturierung im Rahmen der Situation ergibt.

„Sie [die Vielheit; Anm.: EL] ist, wenn man so will, ein erstes Eins dieser Situation, eine zur Zählung „zugelassene“ Vielheit, die nicht das Ergebnis von „vorherigen“ Zählungen ist.“[236] Aus diesem Grund schließt Badiou daraus, dass sie aus der Sicht der Struktur ein unzerlegbarer Term ist, weswegen er zu der Überzeugung gelangt, dass die Ereignisstätten den Vielheiten-Zusammensetzungen den „Rücklauf ins Unendliche“ hermetisch verriegeln. Es gilt, „dass die Stätten die Situation *begründen* (fundieren), weil sie in ihr die absolut ersten Terme sind, welche die Fragen nach der zusammenstellenden Herkunft unterbrechen.“[237]

2.3 Die Natur ist absolut, die Geschichtlichkeit ist relativ

„Man wird bemerken, dass der Begriff der Ereignisstätte – im Unterschied zum Begriff der natürlichen Mannigfaltigkeit – weder intrinsisch noch absolut ist.“[238]

Alain Badiou zufolge ist es de facto möglich, dass Vielheiten im Rahmen einer Situation „besonders“, und „natürlich“ in einer anderen Situation sind. In diesem Zusammenhang definiert er einen „besonderen“ bzw. singulären Term dahingehend, dass dieser zwar innerhalb der Situation zu Präsentation kommt, aber in ihr nicht auf Grund der Verfassung der Situation repräsentiert wird. Ein solcher Term ist zwar Teil der Situation, doch wird er nicht von ihr eingeschlossen. Badiou: „Er ist ein Element, aber kein Teil.“[239] Des Weiteren zählt es zu den Charakteristiken des singulären Terms, dass er selbst unzerlegbar ist.

Im Gegensatz hierzu definiert Badiou – wie bereits an früherer Stelle angeführt – einen „normalen“ Term, als einen, der sowohl präsentiert, wie auch repräsentiert wird.

[235] BADIOU: SE, S 201.
[236] BADIOU: SE, S 201.
[237] BADIOU: SE, S 201.
[238] BADIOU: SE, S 202.
[239] BADIOU: SE, S 537.

Dank der Normalität können Präsentation (Zugehörigkeit) und Repräsentation (Einschluss) in ein Gleichgewicht gebracht werden, welches die Konsistenz der Vielheit rückversichert. Die Normalität ist von daher ein geeigneter Begriff für die Beständigkeit oder, wie Heidegger sagen würde, das „In-sich-dastehen".

An dieser Stelle ist es laut Badiou nun notwendig, sich daran zu erinnern, dass eine Vielheit immer eine Vielheit von Vielheiten ist. Selbst wenn der Fall eintritt, dass die in Erscheinung getretene Vielheit in der gegebenen Situation normal ist, so besteht durchaus weiterhin die Gefahr, dass die sie zusammensetzenden Vielheiten ihrerseits – bezüglich der ersten Vielheit – sowohl natürlich als auch besonders oder auswüchsig[240] sein können. Aus diesem Grund (und um die Konsistenz der natürlichen Vielheit zu beschützen bzw. zu bewahren) müssen mögliche Besonderheiten unterbunden werden. Was den normalen Term anbelangt, so ist es laut Badiou durchaus erwähnenswert, darauf hinzuweisen, dass dieser – im Gegensatz zum singulären Term in der Situation, der er selbst angehört – eingeschlossen ist, der sowohl als ein Element als auch als Teil der Vielheit identifiziert werden kann.

> Eine natürliche Vielheit, die normal ist und deren Terme allesamt normal sind, behält dagegen ihre Eigenschaften, wo immer sie erscheint. *Die Natur ist absolut, die Geschichtlichkeit ist relativ* [Hervorhebung, EL].[241]

Aus diesem Grund erscheint es Badiou naheliegend, dass die natürliche Vielheit sowohl dem Besonderen als auch dem Auswuchs gegenübersteht. In diesem Kontext hat es sich als äußert wichtig erwiesen, dass es zum Wesen der Besonderheit zählt, stets normalisiert werden zu können. Sie ist ihm zufolge ein grundlegender Wesenszug des geschichtlichen Seins und insbesondere jeder Ereignisstätte, die schlussendlich einer „verfassungsmäßigen Normalisierung unterworfen" ist. Gleichzeitig aber gilt die Unmöglichkeit der Singularisierung einer natürlichen Normalität.

[240] Badiou nennt einen Term Auswuchs (excroissance), wenn dieser zwar repräsentiert, aber nicht präsentiert wird.
[241] BADIOU: SE, S 202.

> Gesteht man zu, dass die Ereignisstätten erforderlich sind, damit es Geschichtlichkeit gibt, stellt man Folgendes fest: *Die Geschichte ist naturalisierbar, doch die Natur ist nicht historisierbar* [Hervorhebung, EL].[242]

Aus diesem Grund muss Badiou zufolge verboten werden, dass Natur und Geschichte auf einer Ebene zusammenstoßen. Einfacher formuliert:

> Was es an *Negativen* (nicht Repräsentierten) in der Definition der Ereignisstätte gibt, verbietet, von einer Stätte „an sich“ zu sprechen. Eine Vielheit ist eine Stätte nur in Bezug auf die Situation, in der sie präsentiert (als Eins gezählt) wird. Eine Vielheit ist allein *in*-der-Situation eine Stätte.[243]

Im Vergleich hierzu ist eine natürlich präsentierte Vielheit (eine natürliche Situation) die „rekursive Vielheit-Form eines speziellen Gleichgewichts“, das eigens die Konsistenz der Vielheit versichern und rückversichern kann. In diesem Zusammenhang ist es hier notwendig, Badious Definition einer natürlichen Vielheit zu kennen um ihn auf seinen Weg begleiten zu können.

> Eine Situation ist *natürlich*, wenn alle Vielheit-Terme, die sie präsentiert, normal sind und wenn zudem alle durch ihre vielfältigen Terme präsentierten Vielheiten ebenfalls normal sind.[244]

Das Charakteristikum der natürlichen Situation ist *global* (es bezieht sich auf alle Terme [Hervorhebung, EL]. Badiou zufolge zählt eine natürliche Vielheit die normalen Vielheiten als Eins, die wiederum selbst normale Vielheiten als Eins zählen und so fort. Diese normale Konsistenz gewährleitstet die *Homogenität* der natürlichen Mannigfaltigkeiten. Zudem ist die „Verzweigung“ der natürlichen Vielheiten aus normalen Vielheiten selbst homogen. Das von der natürlichen Vielheit Präsentierte ist dabei selbst natürlich, weshalb Badiou hierzu Folgendes anmerkt: „Die Natur widerspricht

[242] BADIOU: SE, S 202.
[243] BADIOU: SE, S 202.
[244] BADIOU: SE, S 149.

sich in ihrem Inneren nie. (…) Die Natur ist das streng Normale des Seins."[245] Man kann daher ohne Weiteres darauf schließen, dass im Gegensatz zum Nichtrepräsentierten – zum Besonderen – eine natürliche Situation, die alle ihre Teile normalisiert, ihre Wesensmerkmale beschützt.

Die Besonderheit eines Terms zeigt sich darin, dass ihr wesentliches Attribut die des geschichtlichen Seins und die der Ereignisstätte ist, wobei diese nach Badiou dann eine Vielheit in der Situation ist, sofern sie absolut ist. Das Charakteristikum des Besonderen liegt in ihrer Lokalität: „Es ist also wesentlich zu behalten, dass die Definition der Ereignisstätte *lokal* ist, während die Definition der natürlichen Situation *global* ist."[246]

Während Badiou in seinem früheren Werk *Théorie du sujet* die These vertrat, dass die Geschichte nicht existiert, tritt diese Idee – wenn auch in einem abstrakten Rahmen – in einer anderen Form wieder auf.

> Es gibt Ereignisstätten in-der-Situation, aber keine ereignishafte Situation. Wir können die *Geschichtlichkeit* bestimmter Vielheiten denken, doch wir können nicht *eine* Geschichte denken.[247]

Das Ausmaß einer solchen Anschauung wäre beträchtlich, denn: „Jede radikale Handlung der Transformation hat ihren Ursprung in *einem Punkt*, der – im Inneren einer Situation – eine Ereignisstätte darstellt."[248] Dies muss aber nicht unbedingt mit einschließen, dass der Situationsbegriff und die Geschichtlichkeit voneinander nicht different sind.

Kommen wir nun zu der bereits teilweise bekannten Typologie der Situationen, an der Martin Heidegger mit seiner Lehre über das „Seiende im Ganzen" ansetzen kann.

Badiou wendet sich dem Punkt zu, an dem er eine Differenzierung zwischen den Situationen bezüglich des Vorhandenseins einer Ereignisstätte vornimmt. Er führt zunächst einmal an, dass in einer natürlichen Situation keine Ereignisstätte existiert.

[245] BADIOU: SE, S 149.
[246] BADIOU: SE, S 202.
[247] BADIOU: SE, S 202.
[248] BADIOU: SE, S 203.

Doch gibt es noch viele andere Verfassungen von Präsentationen, insbesondere solche, in denen es innerhalb der Verteilung von besonderen, normalen Termen und Auswüchsen weder eine natürliche Vielheit noch eine Ereignisstätte gibt. „Dies ist das riesige Reservoir, aus dem unsere Existenz gewebt ist: *neutrale* Situationen, in denen es weder um das Leben (Natur) noch um die Handlung (Geschichte) geht.“[249] Badiou schließt nun mit seiner Sichtweise von geschichtlichen Situationen an, die durch folgende Kriterien erfasst werden können:

1. In einer geschichtlichen Situation ist mindestens eine Vielheit eine Ereignisstätte, welche die vorliegende Situation präsentiert und zählt, wobei gleichzeitig keines ihrer eigenen Elemente innerhalb der Situation präsentiert wird.
2. Das Charakteristikum der geschichtlichen Situation ist seine Lokalität, insofern sie sich wenigstens auf einen Term bezieht.
3. In einer geschichtlichen Situation liegt deshalb zumindest einer ihrer Punkte am Rand der Leere.

Badiou zieht für sich jetzt mehrere Schlüsse, die ihm Widerspruch zu Heidegger stehen. Zum einen ist die Geschichtlichkeit „die Präsentation an den Punktgrenzen ihres Sein“. Zum anderen steht für Badiou fest, dass das Sein dank der Geschichtlichkeit in die Nähe der Präsentation kommt. Zuletzt legt er fest, dass die Natur „dasjenige ist, dessen Dasein das größte Vergessen nachzeichnet“.

Um nun am Ende dieser Meditation ein Resümee in Bezug auf seine Reflexionen ziehen zu können, fasst Alain Badiou seine Überlegungen in wenigen Worten zusammen:

> Als kompakter Überschuss der Präsenz und der Zählung entflieht die Natur der Inkonsistenz und wendet sich von der Leere ab. Sie ist zu global, zu normal, um sich der ereignishaften Berufung ihres Seins zu öffnen. Allein im Punkt der Geschichte, der repräsentativen Unsicherheit der Ereig-

[249] BADIOU: SE, S 203.

nisstätten, wird sich in Abhängigkeit einer zufälligen Ergänzung erweisen, dass das Vielheit-Sein inkonsistent ist.[250]

Und so lässt sich am Schluss dieser Meditation noch einmal sagen, dass im Unterschied zu Martin Heidegger bei Badiou ein „Sein des Nichts“ existiert. Badiou bestimmt das Anormale als ein Geschichtliches, wobei es an dieser Stelle wichtig ist, zu wissen, dass eine geschichtliche Situation mindestens eine Ereignisstätte hat. Er beschäftigt sich aber nicht nur mit dem Anormalen, sondern auch mit der Unterscheidung von Term und Teil, wobei ein Teil als eine „Teilmenge“ gedacht werden kann. Des Weiteren unterscheidet Badiou in dieser Meditation zwischen präsentierten und nicht präsentierten Vielheiten und wählt hier als Beispiel das Bild einer französischen Familie. Wie bereits erwähnt, befinden sich Ereignisstätten immer am Rand der Leere. Dabei gilt, dass zwar die Stätte selbst präsentiert wird, aber nichts von dem, woraus sie sich zusammensetzt, wird präsentiert. Aus diesem Grund ist die Ereignisstätte kein Teil der Situation. Dabei gilt bei Badiou, dass der Begriff der Ereignisstätte nicht absolut ist.

In der nächsten Meditation steht Badiou vor einer immensen Herausforderung: Gehört das Ereignis zu einer Situation oder nicht? Badiou stößt hierbei auf das gleiche Problem wie bereits Gödel vor ihm – das Problem der Unentscheidbarkeit.

3 Meditation 17 – Das Mathem des Ereignisses. Oder: Die Unentscheidbarkeit der Zugehörigkeit des Ereignisses zu einer Situation

In dieser Meditation geht es um die Unentscheidbarkeit der Zugehörigkeit des Ereignisses zu einer Situation. Im Zentrum des Badiouschen Denkens steht der Begriff des Ereignisses, der sich jeder Definition entzieht und nicht gefasst werden kann. Das Ereignis verweigert sich der Zählung-als-Eins und kann daher in der Situation nicht wiedererkannt werden. Der Sinn des Ereignisses ist nach Badiou, dass es ein anfänglich Unnennbares bewirkt. Ein solches kann von dem Nicht-Ereignis bzw. von der Nichtexistenz nicht unterschieden werden.

[250] BADIOU: SE, S 203f.

In diesem Zusammenhang ist zu erwähnen, dass das Ereignis in der Vergangenheit liegt und als Abgeschlossenes gilt. Sowohl die einfache Vergangenheit als auch das Präsens und die einfache Zukunft sind keine adäquaten Zeitformen des Ereignisses. Badiou erkennt in seinen Überlegungen, dass das futur anterieur, die Vorzukunft, die angemessene Zeitform des Ereignisses ist.

Badiou stellt im weiteren Verlauf die These auf, dass das Ereignis immer lokalisierbar ist und es demnach weder präsentiert noch präsentierbar ist, da es überzählig ist. Aus diesem Grund hinterlässt das Ereignis zum einen keine Spur und zum anderen wird es durch die Vorzukunft begrenzt. Zugleich hat es seine Stätte immer an einem Punkt der Situation, dem Ereignisort, der am Rand der Leere liegt. Hierzu setzt sich Badiou mit den verschiedenen Typen von Situationen auseinander, nämlich der natürlichen, der neutralen und der geschichtlichen Situation. Während die natürliche und die neutrale Situation keine Ereignisstätten aufweisen, besitzt die geschichtliche Situation mindestens eine, weshalb sie lokalisiert werden kann. Dabei gilt, dass eine Ereignisstätte nicht ein Ereignis bedingt. Vielmehr liegt darin die Möglichkeit, dass sich an diesem Ort ein Ereignis ereignet, das erst im Nachhinein als solches qualifiziert werden kann. Als Beispiel für ein Ereignis wählt Badiou die Französische Revolution.

In einem weiteren Schritt stellt sich Badiou die, wie er dann sieht, nicht entscheidbare Frage, ob das Ereignis Term der Situation ist, in der es seinen Ort hat, oder nicht. Er stellt hierfür zunächst die Hypothese auf, dass das Ereignis zur Situation gehört. Dafür muss das Ereignis ihm zufolge zunächst präsentiert sein als eines, das seine eigene Stätte in der Situation hat. Er fordert hierfür, dass die Stätte ein Teil der Situation ist, da es dann exakt lokalisiert werden kann, obgleich der Ort das Ereignis nicht an sich selbst bindet. Badiou kommt durch seine Überlegungen zu dem Schluss, dass das Ereignis nicht als Teil der Situation definiert werden kann, da es sich selbst zugehört, womit wir wieder beim tiefgründigen Abgrund der Selbstbezüglichkeit wären.

In seiner zweiten Hypothese geht er davon aus, dass das Ereignis nicht zur Situation gehört und damit nie stattgefunden hat. Badiou zufolge kann man trotz Unterscheidung der Situationstypen nicht entscheiden, ob ein Ereignis zur Situation gehört oder nicht. Dieses Problem der Unentscheidbarkeit ist bereits bei Kurt Gödel behandelt worden.

3.1 Alain Badiou auf der Spur des Ereignisses

Das *Ereignis* [Hervorhebung; EL] ist der zentrale Begriff in Alain Badious Werk. Es ist der Schlüssel, der einem den Weg zu seinem Denken eröffnet und zugänglich macht. Hierbei gilt, dass das Ereignis per Definition etwas ist, das sich einer Definition ausnahmslos entziehen bzw. verwehren muss. Jeder Versuch einer Definition würde es nämlich unweigerlich begrenzen, würde es determinieren. Die Ursache für diese notwendige „Nichterfassbarkeit" des Ereignisses liegt unter anderem darin, als es sich unter keinen Umständen in eine Ordnung integrieren lässt.[251] Demnach kann es Badiou zufolge niemals bewiesen, sondern nur behauptet und bezeugt werden, wobei letzteres selbst schon als ereignishaft gilt. Das Ereignis ist gleichwohl etwas von dem man sagen kann, dass es existiert oder zu existieren hat, allerdings nur insofern seine Existenz im Nachhinein eben durch ein Subjekt bezeugt wird.

> An event is something that can be said to exist (or rather, to have existed) only insofar as it somehow inspires subjects to wager on its existence.[252]

Gerade deswegen wählt Badiou einen konstruktiven Weg um sich dem Ereignis anzunähern. Es ist kein Unerwartetes. Es ist nicht ein Plötzliches.

> An event is the unprecticable result of chance and chance alone. (…) "Chance [*le Hasard*] is the pure thought of event", (…). (…) the event is not a miracle.[253]

[251] Im Gegensatz dazu gibt es innerhalb einer Situation, in der sich kein Ereignis ereignet, eine nachvollziehbare geregelte Ordnung unter den einzelnen Elementen. Eine derartige Situation wird als ontologisch bestimmt. Peter Hallward schreibt in diesem Zusammenhang zur ontologischen Besonderheit eines Ereignisses in *Badiou. A Subject to Truth* auf Seite 116 Folgendes: „Unlike all normally structured or well-founded multiples, an event belongs to no already existent set. Insofar as it „exists" at all – and remember that to exist means to belong to a set – the event simply belongs to itself."

[252] HALLWARD, Peter: Badiou : a subject to truth / Peter Hallward – Minneapolis, Minn. [u.a.] : Univ. of Minnesota Press, 2003, S 115.

[253] HALLWARD: Badiou, S 114; 371.

Es ist nicht so, dass das Ereignis bei Badiou nichts wäre, im Gegenteil: Es hat „Sein-als-Sein". Außerdem befähigt allein das Ereignis zur Behauptung, dass eine echte „novelty in being" ist.[254] Peter Hallward schreibt in *Badiou* hierzu Folgendes:

> It is its evental origin that ensures that true innovation is indeed (…) a chance to begin again (…).[255]

Zudem definiert Alain Badiou in seiner Theorie das Ereignis als eine Vielheit, die innerhalb der Situation, in welcher es selbst stattfindet, nicht erfasst werden kann. Es ist eben etwas, dass sich der Zählung-als-Eins entzieht und deswegen nicht als Eins in der Situation wiedererkannt werden kann und gerade hierdurch nicht als überzählig gilt. Insofern sich aber das Ereignis in einer Situation ereignet, wandelt es diese und zusammen mit ihr alle folgenden Situationen grundlegend in ihrer Bedeutung ab. Somit bleibt das Ereignis stets auf eine konkrete Situation bezogen. Um aber überhaupt erfassen zu können, inwieweit ein Ereignis stattgefunden hat oder nicht, ist es unerlässlich, dass ein Ereignisort existiert, in dem es sich ereignen kann.

Gerade darin liegt Badiou zufolge die „Bestimmung" des Ereignisses: Es „bewirkt" eine Veränderung der Situation auf ein anfängliches Unbenennbares hin. Die Konsequenz eines solchen – von der Situation nicht erfassbaren – Unnennbaren wäre, dass es „von seiner Nichtexistenz, (…) also vom Nicht-Ereignis schlechterdings nicht unterschieden werden [könnte; Anm.: EL]".[256]

In Badious Theorie vom Ereignis nimmt vor allem dessen Zeitform eine hervorragende Position ein, nicht zuletzt deswegen, da dieses einen „geschichtlich erfahrbaren Moment" beschreibt, der sich jeder letzten Ergründung entzieht.

Was lässt sich vor diesem Hintergrund überhaupt noch Positives über das Ereignis aussagen? Alain Badiou zufolge zeichnet sich das Ereignis dadurch aus, dass es als etwas beschrieben werden kann, das in der Vergangenheit liegt. Dem entgegengerichtet kann man gleichzeitig vermerken, dass dieser Sachverhalt eine Art von „Unzu-

---

[254] HALLWARD: Badiou, S 114.
[255] HALLWARD: Badiou, S 114.
[256] ZEILLINGER, Peter: *Badiou und Paulus. Das Ereignis als Norm?*, S 4. In: IWK-Mitteilunge, 2005.

länglichkeit“ aufweist, insofern – wie Badiou aufzeigt – die Wahrnehmung des Ereignisses hierbei beschränkt ist, da dessen Vorgang lediglich von der Vergangenheit her erklärt werden kann. In diesem Zusammenhang ist es enorm wichtig, dass „diese“ Badiousche Zeitform der Vergangenheit unter keinen Umständen mit der „einfachen“ Vergangenheit – „Das war ein Ereignis“ bzw. „Das ist ein Ereignis gewesen“ – verwechselt werden darf, da es dem Begriff des Ereignisses in Badious Theorie als nicht angemessen bestimmt wird. Der Grund dafür liegt darin, das ein Ereignis, dass sich in der einfachen Vergangenheit ereignet hat, als abgeschlossen gilt. Dies aber widerspricht dem bereits erwähnten Sachverhalt, dass ein Ereignis nicht nur die „konkrete“ Situation, in der es sich ereignet, fundamental verändert, sondern auch alle ihm folgenden Situationen.

Gleichermaßen existiert kein Anhaltspunkt für den möglichen Gebrauch des Präsens als Zeitform des Ereignisses, denn das Ereignis kann – wie bereits erwähnt – nur im Nachhinein als Ereignis bezeugt werden. Demzufolge laufen die Aussagen „Ein Ereignis ereignet sich“ und „Das ist ein Ereignis“ ins „Leere“.

Während die einfache Vergangenheit das Ereignis als etwas in der Vergangenheit abgeschlossenes festlegt, würde die Anwendung der „einfachen“ Zukunft das Ereignis ins Unendliche vor sich herschieben, weshalb die Aussagen „Das Ereignis wird sich ereignen“ und „Das wird ein Ereignis sein“ keinen Sinn in Badious Theorie haben. Auf diesem Weg gelangt Alain Badiou zu dem Bewusstsein, dass nur die Zeitform des *futur anterieur* [Hervorhebung; EL], der Vorzukunft, dem Ereignis als angemessen definiert werden kann.

> Since the event has no present and leaves no durable trace, the temporality of the event as such is necessarily confined to the time of a futur anterieur: thanks to a subsequent subjective intervention, the event “will have been presented”.[257]

Peter Zeillinger schreibt in diesem Kontext im Artikel *Badiou und Paulus. Das Ereignis als Norm?* auf Seite 8, dass „allein das future anterieur (…) eine Befristung dieser

[257] HALLWARD: Badiou, S 115.

Zukunft aus[drückt; Hinzufügung EL] und lässt von diesem Ende her das vorgängige Ereignis bereits jetzt – in der Ungewissheit des Zeugnisses, gleichwohl in der affirmativen Positivität dieses Zeugnisses als *Wahrheits*zeugnis – wirksam werden.“

Exkurs: Heidegger und der Begriff des Ereignisses

Verfolgt man Heideggers Weg von seinem Denken in *Sein und Zeit* bis hin zu den *Philosophischen Beträgen: Vom Ereignis*, so erscheint es als offensichtlich, dass der Begriff *Ereignis* sich für ihn zu einem zentralen Grundwort entwickelt, wenn gleich keine geradlinige Entwicklung ausgemacht werden kann. Die Veränderungen sind dermaßen fundamental, wesentlich unermesslich, dass ihre Tragweite nicht auf einfache Weise definiert bzw. bewertet werden kann. Eine weitere Herausforderung zeigt sich darin, als das Ereignis bei Heidegger gemeinhin nicht von der Geschichte her konkret erfasst, sondern „nur“ von der Ontologie her gedacht werden kann.

Einer von Martin Heideggers Schritten besteht darin, eine innere Differenzierung des Ereignisses vorzunehmen, denn es zeigt sich, dass er in erster Linie dem „Dass des Ereignisses“ dem „Es gibt“ den Vorrang gewährt. Desweilen kann sein Denken als ein „nachträgliches“ Sinnen verstanden werden, in dem sich das Ereignis als ungeschichtlich erweist. Von dieser Denkrichtung vollzieht sich bei Heidegger ein „Wandel des Seins“, von dem man schließlich nicht mehr auszusagen vermag, als dass es sich „ereignet“: „Sein wird ereignet. „Es“, das Ereignis, „gibt Sein“.“[258]

Heidegger stellt in diesem Zusammenhang die These auf, dass im Ereignis sich das Verhältnis von Sein und Zeit eröffnet, wobei das Ereignis als eine „bloße“ Notwendigkeit identifiziert wird um den Wandel des Seins angemessen und frei von Ideologie denken zu können. Gleichzeitig erweckt die Frage nach dem Ereignis den Verdacht, sich auf das „Unsichere“, „Unentschiedene“ und „Ununterscheidbare“ zu pochen. Heidegger lässt dem Ereignis besondere Nuancen zukommen, in dem er z.B. die Frage nach dem Verhältnis von Mensch und Ereignis und die Frage nach dem Verhältnis von Gott und dem Ereignis stellt. In diesem Zusammenhang versteht er z.B. unter dem Geschehnis (einem Ereignis) dasjenige, dem der Mensch zugehört und gleichzeitig vom Wesen her angehört. Eben deshalb ist er der Überzeugung, dass

[258] THOMÄ, Dieter [Hrsg.] : Heidegger-Handbuch : Leben - Werk - Wirkung / Dieter Thomä (Hrsg.) . - Stuttgart [u.a.] : Metzler, 2003, S 303.

sich das Ereignis nicht nur ohne Menschen nicht ereignen kann, sondern dass dieses den Menschen „braucht“, damit Geschichte und Seinsverständnis überhaupt erst möglich werden können.

> Aber auch wenn das Ereignis sich nicht ohne dem Menschen ereignen könnte, so ist der Mensch doch nicht der Herr des Ereignisses. Es liegt nicht im Belieben des Menschen wie er das Sein versteht.[259]

Zugleich verbirgt sich nach Heidegger der letzte Gott im Ereignis. So kommt er zu der Einsicht, dass

> das Ereignis […] das Zwischen bezüglich des Vorbeigangs des Gottes und der Geschichte des Menschen [ist; Hinzufügung EL]. (…) Vorbeigang ist nicht Geschichte und Geschichte ist nicht Ereignis und Ereignis ist nicht Vorbeigang, und doch können alle drei (…) nur in ihren Bezügen, d.h. aus dem Er-eignis selbst erfahren und er-dacht werden.[260]

Heideggers *Beiträge zur Philosophie* mögen für manche als bloße Fragmente erscheinen, doch er selbst gewinnt für sich nicht nur wichtige Resultate zum Begriff des Ereignisses, sondern auch die Einsicht, dass die Zeit der Systeme, in denen die Wahrheit „nur“ auf Grundsätze beruht, ein für alle Mal aus ist. Im Fortgang seiner Arbeit muss er jedoch einsehen, dass basierend auf seinen Überlegungen, der Begriff des Ereignisses sprachlich nicht definiert werden kann. Die Schwierigkeit besteht darin, dass sich über das Ereignis „fast alles“ aussagen lässt, denn zum einen ereignet es das Sein und die Zeit und zum anderen ist das Ereignis der „grundlegendste Begriff“, den man sich nur zu erdenken vermag. Heideggers Überlegungen führen ihn somit in eine Sackgasse, von der aus ein Weitergehen unmöglich wird, denn:

---

[259] THOMÄ: Heidegger, S 304.
[260] THOMÄ: Heidegger, S 187.

> es [das Ereignis; Hinzufügung EL] ist nicht zu definieren. Welche charakteristischen Eigenschaften kommen dem Ereignis zu? – Es hat keine Eigenschaften, wie ein Ding, eine Substanz Eigenschaften hat. Welche Funktion hat es dann? Es erfüllt keine Funktion in der Weise, wie eine Sache oder ein Mensch eine Funktion übernehmen kann. Was macht es dann, dieses ominöse ›Ereignis‹? – „Das Ereignis ereignet".[261]

Um die fundamentale Bedeutung des Ereignisses für Martin Heidegger verstehen bzw. nachvollziehen zu können, kann man dessen eigene Worte heranziehen, dass

> das Ereignis die Art und Weise darstellt, in der die Gegebenheit des gegebenen Seienden für uns fragwürdig wird. Dieses Geschehnis erwächst aus der Not, gründet eine Stätte und leitet ein geschichtliches Zeitalter ein, das in seiner eigenen, einzigartigen Beziehung zum Göttlichen steht. Das Ereignis ist ein Geschehnis, das das Da-Sein ebenso fordert, als es vom Da-Sein erfordert wird.[262]

Exkurs: Gödel und die Entdeckung des Ereignisortes in der formalen Unvollständigkeit von Systemen

Kurt Gödel machte in seinen Forschungen die Entdeckung, dass es wahre axiomatische Sätze gibt, die innerhalb des formalen Systems der Mathematik nicht bewiesen werden können. Er erkannte darin „das" Kernproblem der Mathematik, bei welchem man gegen eine feste Mauer an Unbeweisbarkeit und vor allem an Unentscheidbarkeit als die größte Herausforderung prallt. Der Mensch wird hier Opfer seines begrenzten Verstandes und vermag auf Grund des Verbleibens von unlösbaren Fragen kein mathematisch vollständiges System zu konstruieren. Für Gödel aber gilt, „dass nichts, was in der Welt geschieht, auf Zufall oder Dummheit zurückzuführen sei".[263]

---

[261] THOMÄ: Heidegger, S 302.
[262] Gesamtausgabe / Martin Heidegger. – Frankfurt am Main : Klostermann.
Hermann, Friedrich-Willhelm von (Philosoph) [Hrsg.] : Beträge zur Philosophie : (vom Ereignis) / [hrsg. Von Friedrich-Willhelm von Hermann], 1989, S 187.
[263] GOLDSTEIN: Gödel, S 29.

Versucht man nun, zwischen Gödel und Badiou eine Verbindung zu denken, dann könnte man innerhalb der Mathematik das Ereignis als dasjenige denken, bei dem weder ein Weitergehen noch eine nachträgliche Beschreibung möglich ist. Insofern kann man die bisherigen Entwicklungen der Zahlentheorie nicht als Ereignisse bezeichnen, da sie stets Zusatzannahmen eingeführt hat, die sich – im Gegensatz zum Ereignis – in die bestehende Ordnung integrieren ließen. Gödels Denken aber führt die Mathematik an ihre eigenen Grenzen von denen aus keine Erweiterungen, kein Weitergehen, mehr möglich sind.

Mit Blick auf Badiou zeichnen sich seine Gedanken hierdurch aus, dass er zwar nicht das Ereignis und dessen Unentscheidbarkeit, sondern den Ereignisort „entdeckte". An dieser Stelle fungiert der Ereignisort als Bindeglied zwischen der Mathematik, die hier auf ihre Grenzen stößt und sich dennoch nicht außerhalb der Mathematik befindet, und dem Ereignis, das eine Störung bewirkt hat, hier aber noch innerhalb der Mathematik erfasst werden kann. Badiou zufolge kann man in diesem Zusammenhang sagen, dass für den Fall, dass es so etwas wie einen Bruch gibt und dass das Ereignis dasjenige wäre, was diesen prinzipiellen Bruch provoziert hat. Hieran zeigt sich ihm zufolge die Schwierigkeit, dass man zum einen zwar nicht an das Ereignis, zum anderen aber an den Effekt des Ereignisses herankommen kann. Man kann sich aber laut Badiou die Möglichkeit des Denkens und Redens vom Ereignis bewahren, sofern man den Weg der Mathematik und der Ontologie verlässt und sich der Philosophie zuwendet, die

> vor allem eine allgemeine Theorie des Ereignisses ist. Das heißt eine Theorie darüber, was sich der ontologischem Subtraktion entzieht. Oder eine Theorie des Unmöglichen, das der Mathematik eignet. (…) Sie, die Philosophie, wird immer geteilt sein zwischen dem Wiedererkennen des Ereignisses (…) und dem Denken seines Seins (…).[264]

Im Denken Badious zeigt sich, dass für den Fall, dass die Mathematik sich unter dem Schutz des Seins selbst stellt, die „Theorie des Ereignisses", die Bestimmung des Trans-Seins, anpeilt. Dabei tritt ein Problem auf, dass Badiou wie folgt formuliert:

[264] BADIOU, Alain: Gott ist tot : kurze Abhandlung über eine Ontologie des Übergangs / Alain Badiou. Aus dem Franz. von Jürgen Brankel . - 2., unveränd. Aufl. . - Wien : Turia + Kant , 2007, S 57.59.

> angenommen, daß das Ereignis das ist, was die Sicherheit gibt, daß nicht alles mathematisierbar bist [sic!], muß man dann daraus schließen oder nicht schließen, daß das Vielfache intrinsisch heterogen ist? Denn denken, daß das Ereignis der Punkt des Bruchs hinsichtlich des Seins – oder was ich die Struktur des Trans-Seins nenne – ist, entbindet nicht, das Sein des Ereignisses selbst zu denken. Das Sein des Trans-Seins. Erfordert dieses Sein des Ereignisses einer Theorie des Vielfachen, die zu derjenigen, die das Sein als Sein begründet, heterogen ist.[265]

Badiou zufolge vertritt Deleuze diesen Standpunkt, während er selbst seine Position verteidigt, die besagt, dass die Vielfältigkeit – ausgehend von der Axiomatik - homogen ist. Daraus ergibt sich für ihn die unabdingbare Notwendigkeit, dass er das Sein des Ereignisses zum einen als Bruch des Gesetzes der Vielheit begründet und zum anderen als mit dem Gesetz homogen erfasst. Durch das Fehlen jeglichen Axioms bestimmt Badiou das Ereignis als eine Menge oder als ein Vielfaches. „Es [Das Ereignis; Anm.: EL] ist dieses Ausbleiben der Grundlage, der aus ihm eine reine, zufällige Ergänzung zur Vielfach-Situation, für die es ein Ereignis ist, macht.“[266]

Fragt man sich nun in diesem Zusammenhang, welche Aufgabe Badiou hier der Philosophie auferlegt, so kann man erkennen, dass bei ihm die Philosophie

> immer geteilt sein [wird; Anm.: EL] zwischen dem Wiedererkennen des Ereignisses als überzähliges Kommen des Einen und dem Denken seines Seins als einfache Ausdehnung des Vielfachen.[267]

[265] BADIOU: Gott, S 57.
[266] BADIOU: Gott, S 58.
[267] BADIOU: Gott, S 59.

3.2 Das Verhältnis von Ereignis und Situation

3.2.1 Alain Badiou: Ein Ereignis ist immer lokalisierbar

Eine von Alain Badious Theorien besagt, dass ein Ereignis immer lokalisierbar ist. Was kann man sich darunter vorstellen? Badiou versucht hier einen möglichen Anhaltspunkt zu zeigen und zitiert hierfür aus *Das Sein und das Ereignis*:

> Wenn das Ereignis in der Präsentation stets *lokalisierbar* ist, so ist es als solches weder präsentiert noch präsentierbar. Es ist – weil es nicht ist – überzählig. [268]

Wenn alles, das existiert, in oder zu einer Situation gezählt bzw. gerechnet wird (als das Eine in dieser Situation), dann ist das Ereignis überzählig. Es ist etwas, das sich der Zählung–als–Eins entzieht. Des Weiteren gilt, dass, wenn ein Ereignis nicht präsentiert wird, es zum einen keine dauerhafte Spur hinterlässt und zum anderen wird es durch die Zeit einer Vorzukunft begrenzt.

Für die Zugehörigkeit eines Ereignisses zu einer Situation muss Badiou zufolge verlangt werden, dass dieses in der Weise präsentiert wird, als eines, das seine eigene Stätte – von ihm Ereignisort (bzw. -stätte) genannt – innerhalb der Situation hat. Gleichzeitig vermag kein Ereignis diese in ihrer Gesamtheit zu betreffen. Ein Ereignis findet seinen Ort immer an einem Punkt der Situation, woraus man nach Badiou folgern kann, dass „es *eine in der Situation* präsentierte Vielheit ‚betrifft'."[269]

> Thanks to its site, an event can always be located precisely in a situation, in a specific „point" of the situation, and to begin with each event concerns precisely this point (…).[270]

[268] BADIOU: SE, S 205.
[269] BADIOU: SE, S 205.
[270] HALLWARD: Badiou, S 117.

Dieser Punkt der Situation – die Ereignisstätte – liegt nach Badiou am Rand der Leere und „whatever lies along the edge of the void, however, is always precisely located in the situation."[271]

Untersucht man die verschiedenen Typen von Situationen in Badious Theorien, so wird man erkennen müssen, dass eine innere Differenzierung unentbehrlich ist. Man unterscheidet bei alledem die bereits bekannten natürlichen, kompakten oder neutralen Situationen von der geschichtlichen Situation. Während man den Umstand, dass in solchen Situationen die Existenz eines Ereignisses unmöglich ist, als bekannt voraussetzen darf, führt Badiou an, dass

> die Existenz einer Vielheit am Rand der Leere (…) allein die Möglichkeit des Ereignisses vorkommen [lässt; Hinzufügung EL]. Es kann immer noch sein, dass keines stattfindet.[272]

Die natürliche Situation hebt sich gerade dadurch ab, dass sie global charakterisiert werden kann und sie deshalb keinen Ereignisort aufweisen kann. Dies gilt ebenso für die neutrale Situation, denn diese hat – wie bereits bekannt ist – weder Natur noch Geschichte. Im Gegensatz dazu findet man in jeder geschichtlichen Situation mindestens eine Vielheit, die eine Existenzstätte ihr Eigen nennt und daher als lokal definiert werden kann. Badiou zufolge besitzt eine geschichtliche (lokale) Situation mindestens einen Punkt am Rand der Leere, weshalb die Möglichkeit besteht, dass sich in ihr ein Ereignis ereignen kann, das selbst an dem Ort (bzw. an dem Punkt) gebunden ist.

> Nicht weil die Stätte in der Situation existiert, gibt es ein Ereignis. Sondern *damit* es ein Ereignis gibt, ist die lokale Bestimmung der Stätte notwendig, das heißt eine Situation, in der mindestens eine Vielheit am Rand der Leere präsentiert wird.[273]

[271] HALLWARD: Badiou, S 117.
[272] BADIOU: SE, S 206.
[273] BADIOU: SE, S 205.

An dieser Stelle erscheint es als hilfreich, sich daran zu erinnern, dass ein Ereignis immer erst im Nachhinein bzw. in der Rückwirkung als solches identifiziert und qualifiziert werden kann. Erst dadurch kann ein Ereignis als „ereignishaft“ charakterisiert werden. Da aber die Stätte stets eine anormale Vielheit am Rand der Leere ist, gilt, dass ein Ereignis selbst ausschließlich innerhalb einer geschichtlichen Situation gefunden werden und stattfinden kann dessen ungeachtet aber sich nicht zwingend ereignen muss.

Vor diesem Hintergrund definiert Alain Badiou nun ein Ereignis der Stätte X wie folgt:

> Es sei, in einer geschichtlichen Situation, eine Ereignisstätte X gegeben.
>
> Ich nenne Ereignis der Stätte X eine Vielheit, die sich zum einen aus den Elementen der Stätte und zum anderen aus sich selbst zusammensetzt.
>
> Die Einschreibung eine Mathems des Ereignisses ist hier kein Luxus. Sei S die Situation und $X \in S$ (X gehört zu S, X wird durch S präsentiert) die Ereignisstätte. Ich schreibe e_x für das Ereignis (sprich: „Ereignis der Stätte X“). Meine Definition lautet also:
>
> $$e_x = \{x \in X, e_x\}$$
>
> Das heißt: Das Ereignis macht einerseits alle Vielheiten, die zu seiner Stätte gehören, und andererseits das Ereignis selbst zu einer Eins-Vielheit.

Nun drängen sich unmittelbar zwei Fragen bezüglich des Status des Ereignisses auf.

3.3 Die „anschauliche“ Idee eines Ereignisses. Oder: Die Französische Revolution

Alain Badiou stellt sich selbst die Frage, inwieweit diese Definition dem Ereignis tatsächlich gerecht wird und versucht in diesem Zusammenhang sich mit Hilfe des Bildes des Ereignisses der Französischen Revolution der Antwort zu nähern.

Was kann man nun im Blick auf Badiou unter dem Wort Ereignis verstehen?

> In each case, the event–the uprising, the encounter, the invention-breaks fundamentally with the prevailing routine: „Every radically transformative action has its origin in one point.“[274]

Der Historiker schließt unter der „Französische Revolution“ alle Spuren und Tatsachen der französischen Epoche zwischen 1789 bis 1794 mit ein, welches seine Stätte bzw. sein Ereignisort zu einem Eins formt.

> The elements of its site included all the things not re-presentable according to the old situation of the ancient régime. These were presentable elements (…) whose own elements were not presentable.[275]

Bei einer solchen Zerlegung besteht jedoch die Gefahr, dass „das Eins des Ereignisses so weit zerlegt wird“, dass es zu einer unendlichen Aufzählung von „Gesten, Dingen und Worten“ kommt, die mit dem Ereignis koexistieren. Der Anhaltspunkt dieser Verzweigung

> ist der *Modus*, in dem *die Revolution ein axialer Term der Revolution selbst ist*, das heißt die Art und Weise, in der das Bewusstsein der Zeit – und der rückwirkende Eingriff unseres Bewusstseins – die gesamte Stätte durch das Eins ihrer ereignishaften Qualifizierung filtert.[276]

[274] HALLWARD: Badiou, S 107.
[275] HALLWARD: Badiou, S 118.
[276] BADIOU: SE, S 207.

Von diesem Blickwinkel aus bewertet Badiou das Ereignis der Französischen Revolution als den nicht wahrnehmbaren Moment des Übergangs, durch den die betroffenen Menschen sich nicht mehr länger als Pfeiler dieser Regierungsform begreifen, sondern selbst als Subjekte der politischen Revolution.

Badiou verweist in *Das Sein und das Ereignis* anhand des Ausrufes von Saint-Just: „Die Revolution ist erstarrt" auf unendlich viele Symptome des „Überdrusses und Eingeschränktseins" der Franzosen. Hallward schreibt in diesem Zusammenhang: „Revolutionary truth then persisted through those groups who preserve a fidelity to this event and these declarations."[277] Die Revolution wird hierbei zu einem Element von sich selbst und zwar als Komponente des revolutionären Prozesses als solchem. Es ist Saint-Just, der nach dieser Manier verfährt, indem er – wie zuvor angeführt – jenes *Eins-Merkmal* hinzufügt, welches sich selbst als Revolution klassifiziert. Damit wird die Französisches Revolution von 1789 bis 1794 zu einem Ereignis der Stätte, indem sie sich als Vielheit sowohl aus den unendlich vielen Zerlegungen als auch aus sich selbst zeigt.

Diese unendliche Vielheit wird nach Badiou als Ereignis präsentiert, wobei sie sich gleichzeitig „darüber hinaus (…) selbst als immanente Zusammenfassung und Eins-Merkmal ihrer eigenen Vielheit präsentiert."[278]

Die Revolution als Ereignis kann – wie bereits gezeigt wurde – nur im Nachhinein als solches identifiziert werden, wobei sie bezüglich der Aufzählung der unendlich zerlegten Termen selbst als überzählig definiert werden muss. Badiou schreibt:

> Das Ereignis ist also in der Tat jene Vielheit, die zugleich ihre gesamte Stätte präsentiert und durch den reinen, der eigenen Vielheit immanenten Signifikanten seiner selbst auch die Präsentation selbst präsentiert, das heißt das Eins der unendlichen Vielheit, die sie ist. Diese empirische Evidenz entspricht sehr wohl unserem Mathem, welches besagt, dass der ereignishaften Vielheit nicht nur die Terme ihrer Stätte zugehören, sondern auch die Markierung e_x ihrer selbst. [279]

[277] HALLWARD: Badiou, S 111.
[278] BADIOU: SE, S 207.
[279] BADIOU: SE, S 207

3.4 Die Unentscheidbarkeit der Zugehörigkeit des Ereignisses zu einer Situation

Alain Badiou setzt sich nun direkt im Anschluss an das vorherige Kapitel *Die „anschauliche" Idee eines Ereignisses* mit den Auswirkungen des Verhältnisses von Ereignis und Situation auseinander und stellt sich fürs Erste die Frage. „Ist das Ereignis nun ein Term der Situation, in der es seine Stätte hat, oder nicht?"

Doch gerade diese Frage erweist sich für Badiou als unentscheidbar. Diese Unentscheidbarkeit der Zugehörigkeit eines Ereignisses zur Situation seines Ereignisortes bringt das Fundament seines Gedankengebäudes in seiner Gesamtheit ins „Wanken". Der Grund für diese Unentscheidbarkeit des Signifikanten e_x bezüglich seiner Ereignisstätte liegt in der Überabzählbarkeit. Badiou: „Entspricht er [der Signifikant; Anm. EL] einer Vielheit, die in der Situation tatsächlich präsentiert wird? Und wie ist diese Vielheit beschaffen?"[280]

In seiner Theorie ist das Mathem des Ereignisses bekannterweise eine Vielheit, die sich aus den Elementen der Stätte X und sich selbst zusammensetzt. Da aber die Stätte X „am Rand der Leere" liegt, können ihre Elemente x keinesfalls innerhalb der Situation präsentiert werden. Nur die Ereignisstätte X gelangt selbst zur Präsentation. Demzufolge kann nach Badiou die These der Präsentation des Ereignisses nur in dem Fall für gültig erklärt werden, in dem der Signifikant e_x des Ereignisses existiert. Mithin kann ihm zufolge die „Wurzel der Unentscheidbarkeit" offen gelegt werden. „The event is ‚unpresented and unpresentable', and its belonging to the situation is ‚undecidable' from within the situation itself (…)."[281]

3.4.1 Erste Hypothese: Das Ereignis gehört zur Situation

Nur das subjektive Eingreifen kann entscheiden, ob ein Ereignis wirklich Teil einer Situation ist oder nicht. Damit eine Zugehörigkeit bzw. Nichtzugehörigkeit überhaupt erst verifiziert werden kann, muss das Ereignis zuerst präsentiert sein als eines, das seinen eigenen Ort in der Situation hat. Diesen Ort nennt Badiou den Ereignisort (site événemtiel).

[280] BADIOU: SE, S 208.
[281] HALLWARD: Badiou, S 116.

Es bleibt einem hier nur die Option, zwischen den beiden sich widersprechenden Hypothesen (bezüglich der Zugehörigkeit und der Nichtzugehörigkeit des Ereignisses innerhalb der Situation) zu differenzieren. Eben deswegen stellt es Badiou eine Bedingung jedes „echten“ Ereignisses dar, dass seine Ereignisstätte innerhalb dessen gezählt werden kann. Des Weiteren ist es für Badiou eine strenge Voraussetzung, dass der Ort ein Teil der Situation ist, denn wie bereits bekannt sein sollte, kann das Ereignis dank seines Ortes immer exakt in einer Situation lokalisiert werden in einem bestimmten „Punkt“ der Situation und zunächst betrifft jedes Ereignis exakt diesen Punkt. Und so kann man sagen, dass zwar jedes Ereignis spezifisch zu seinem Ort ist, aber es nicht unabdingbar zu dem Ort gehört. Anders formuliert: Der Ort bindet das Ereignis nicht an sich selbst.

Badiou nimmt nun in einem ersten Schritt an, dass das Ereignis zur Situation gehört, wobei dieses ganz besondere Qualitäten aufweist, wie z.B., dass das Ereignis als eine *singuläre Vielheit* definiert werden kann. Seiner Theorie zufolge steht das Adjektiv „normal“ bezüglich des Ereignisses parallel zur Präsentation des Ereignisses. In diesem Fall wäre dasselbige Teil der Situation. Gleichzeitig behauptet Badiou, dass

> das (…) unmöglich [ist; Hinzufügung EL], weil ihm die Elemente seiner Stätte zugehören, welche – da die Stätte am Rand der Leere ist – ihrerseits nicht präsentiert werden.[282]

Damit steht für Badiou fest, dass das Ereignis gemäß der Konstitution nicht als Teil der Situation bestimmt werden kann, da die Verfassung für sich kein Ereignis zählt. Dennoch schreibt Badiou, dass für den Fall, dass das Ereignis Teil der Situation ist – was als gleichbedeutend mit seiner Präsentation gesehen werden kann –, es für sich selbst nicht am Rand der Leere liegt.

Der Grund dafür liegt darin, dass es sich selbst zugehört, formal gesagt: $e_x \in e_x$. Das Ereignis als eine Vielheit präsentiert hier zumindest eine Vielheit, nämlich sich selbst. In Badious Theorie modelliert das Ereignis

[282] BADIOU: SE, S 208.

> eine Sperre gegen seine *vollständige* Singularisierung, insofern sein Signifikant der Vielheit, die es ist, zugehört. Sagen wir es folgendermaßen: Ein Ereignis ist keine Ereignisstätte (es stimmt mit ihr nicht überein). Es „mobilisiert" die Elemente seiner Stätte, aber es fügt seine eigene Präsentation hinzu.[283]

Es gilt: Wenn Badiou annimmt, dass das vom Blickwinkel der Situation aus gesehene Ereignis ihr angehört, dann löst es sich selbst von der Leere los. Dabei stellt sich heraus, dass wenn das Ereignis zur Situation gehört, es sich zwischen die Leere und sich selbst setzt und von daher als das Ultra-Eins bestimmt wird, welches Badiou zufolge „der einzige Term des Ereignisses [ist; Hinzufügung EL] […] aus dem Eins-das-es-ist besteht." Das Eins ist, da es durch die Situation präsentiert wird, weshalb es auch unter die Zählung-als-Eins fällt.

> *Zu behaupten, dass das Ereignis zur Situation gehört, bedeutet zugleich zu sagen, dass es sich begrifflich von seiner Stätte unterscheidet, und zwar indem es sich selbst zwischen sich und die Leere stellt.* Diese Zwischenstellung, die an die Zugehörigkeit zu sich selbst gebunden ist, ist das Ultra-Eins, weil es das Gleiche *zweimal* als Eins zählt: als präsentierte Vielheit und als in ihrer Präsentation präsentierte Vielheit.[284]

3.4.2 Zweite Hypothese: Das Ereignis gehört nicht zur Situation

Badiou zufolge lässt sich aus der zweiten Hypothese schließen, dass, wenn das Ereignis nicht zur Situation gehört, nichts stattgefunden haben kann, denn außer sich selbst präsentiert das Ereignis nur die Elemente seiner Stätte, die nicht zur Präsentation kommen können.

> Und wenn das Ereignis selbst auch nicht präsentiert wird, so wird durch es – vom Standpunkt der Situation – *nichts* präsentiert. Daraus folgt: So-

[283] BADIOU: SE, S 209.
[284] BADIOU: SE, S 209.

> bald der Signifikant e_x […] zu einer Situation, die ihn nicht präsentiert, »hinzugefügt« wird, ist es *allein die Leere*, die der Situation subsumiert werden kann, denn keine präsentierbare Vielheit hört auf diesen Namen.[285]

Nach Badiou ist es das Ereignis (unabhängig davon, wie es stattfindet), das die Leere einer Situation offenbart, denn diese verharrt in jedem Teil der Situation. Sie verbleibt „ein für alle Mal" unpräsentierbar und unbegreiflich. Es gilt: „The evental site is not itself void but that element of the situation which is located ‚at the *edge* of its void'."[286]

Kehrt man zu dem Beispiel der Französischen Revolution von 1789 zurück, so stellt Badiou fest, dass diese gewiss „französisch" war. Dennoch gilt, dass nicht „Frankreich" dasjenige war, wodurch das Ereignis sich ereignet und seinen Namen bekommen hat. Vielmehr ist es die Revolution, die die Bedeutung für die historische Situation bereitstellt, die man „Frankreich" nennt.

Bei alledem ist sich Badiou aber bewusst, dass jemand durchaus behaupten kann, dass die Französischen Revolution bloß ein Wort ist und nichts dergleichen jemals stattgefunden hat.

Die Situation hilft demnach nicht bei der Entscheidung, ob ein Ereignis zu einer ihr gehört oder nicht weshalb die beiden Optionen offen bleiben mit denen Badious Gedankengebäude „steht und fällt": Liegt das Ereignis innerhalb der Situation, so durchbricht es das Am-Rand-der-Leere-Sein der Stätte, insofern als es sich zwischen sich selbst und die Leere drängt. Gehört das Ereignis aber nicht zu ihr, dann beschreibt es (wenn überhaupt) zumindest die Leere selbst. Badiou stellt somit zusammenfassend fest:

> Auf der einen Seite konnotierte das Ereignis die Leere, auf der anderen stellte es sich zwischen die Leere und sich selbst. Es wäre zugleich ein Name der Leere und das Ultra-Eins der präsentierenden Struktur. Und dieses Ultra-Eins-das-die-Leere-benennt entfaltete im Inneren-Äußeren

[285] BADIOU: SE, S 209.
[286] HALLWARD: Badiou, S 117.

> einer geschichtlichen Situation, in einer Verdrehung [*torsion*] seiner Ordnung, das Sein des Nicht-Seins, das heißt, *das Existierende*.

Der entscheidende Punkt ist hier ein interpretierender Eingriff, denn durch die Zugehörigkeit verhindert er den Einbruch der Leere, um die Leere zu zwingen, ihre Leere einzugestehen.

Bei alldem muss man sich die Frage stellen, ob Badious Philosophie überhaupt eine Zukunft hat. Im Zentrum seiner Philosophie stehen die Ontologie und die Logik des Ereignisses, welche er vehement vertritt. Dennoch ist seine Lehre vom Ereignis kaum noch entfaltet. Seine Arbeiten zeugen vom Unentscheidbaren und Unsagbaren selbst, wenn sich diese – wie das Ereignis – erst im Nachhinein bewähren. Gleichzeitig macht Badiou kein Geheimnis daraus, wogegen er sich wehrt, noch zu seiner Nähe zu Denkern wie Derrida und Levinas.

Gerade sein Buch *Paulus: Die Begründung des Universalismus* ist meiner Meinung nach aktueller denn je. Hier zeigen sich Parallelen zwischen seinen rein ontologischen und philosophischen Gedanken und dem konkreten Gegenstand der Auferstehungstheologie des Paulus.

3. TEIL

V DIE RELEVANZ DES MATEHEMATISCHEN UNENDLICHKEITSVERSTÄNDNISSES FÜR DIE THEOLOGIE

1 Resümee über das Unendliche in der Mathematik insbesondere bei Cantor und Gödel

In der Geschichte der Mathematik gab es die verschiedensten Ideen und Versuche, eine „Theorie des Unendlichen“ in die bestehenden Grundstrukturen der Mathematik zu integrieren.

Bereits beim Begriff der Zahl begegnet einem das Problem des Unendlichen, denn jede Zahl – auch die natürliche Zahl – kann als unendlich angeschrieben werden. Doch schon der Terminus Zahl birgt eine Herausforderung in sich. Obgleich Zahlen etwas Alltägliches sind, sind sie etwas völlig Abstraktes, Unfassbares.

Versucht man über Zahlen zu sprechen, so muss man sich bewusst machen, dass Zahlen selbst eine unendliche Menge bilden, die kein menschliches Machwerk sind. Die Ideen der Mathematik, wie z.B. die Idee des Unendlichen, sind demnach ewige Wahrheiten und nicht nur mathematische Formeln.

Die wohl bedeutendsten Mathematiker in Zusammenhang mit der Theorie der Unendlichkeit sind Georg Cantor und Kurt Gödel, die sich mit diesem Thema in einer bis dahin nie da gewesenen Art und Weise beschäftigten.

Mit Georg Cantor und seiner Mengenlehre tritt etwas Neues in die Mathematik ein. Bevorzugte man zuvor das „potentiell Unendliche“, so verteidigte er in seiner ihm eigener Sprache das „aktual Unendliche“, sowohl dessen Existenz als auch Notwendigkeit für die Mathematik. Er ordnete diese „neue Provinz“ der „Metaphysik“ zu, da ein solches Denken absolut rein ist. Er stellte sich die Frage, ob vom aktual Unendlichen als Absolutes, Transfinites oder Abstraktes gesprochen werden könne. Cantor kam dabei zu dem Entschluss, dass das Aktual-Unendliche sowohl konkret – wie er es selbst in seiner Mengenlehre praktizierte – als auch abstrakt bejaht werden kann. Gleichzeitig wehrte er sich vehement dagegen, vom absolut Unendlichen als Transfinitem zu sprechen. In Bezug auf die unendlichen Zahlen sah er das Problem darin, dass man oft geneigt ist, auf sie alle Eigenschaften der endlichen Zahlen zu übertragen, ohne dabei zu erkennen, dass es sich um ein neues, unabhängiges Zahlengeschlecht handelt. Das Besondere in Cantors Arbeit liegt darin, dass er seine Lehre in ein großes System integrieren wollte, in dem auch die Theologie und Philosophie eine bedeutende Rolle spielen, denn ohne Metaphysik lässt sich ihm zufolge keine exakte Wissenschaft begründen.

Ferner ist es der Verdienst von Georg Cantor, gezeigt zu haben, dass es nicht nur verschiedene „Arten“ von Unendlichkeiten gibt, die sich durch ihre Mächtigkeit voneinander unterscheiden, sondern dass es daraus folgend eine aufsteigende Hierarchie von Unendlichkeiten gibt, die bis zum absolut Unendlichen aufsteigt, wobei es an mindestens einer Stelle zu einem Bruch kommen muss, da eine stetige Folge von Unendlichkeiten unmöglich erscheint.

Es war Kurt Gödel, der durch seine mathematischen Forschungen entdeckte, dass es wahre (arithmetische) Sätze gibt, die nicht beweisbar sind. Aus diesem Grund kommt er zu dem Ergebnis, dass eine vollständige Freiheit von inneren Widersprüchen nicht mit absoluter Sicherheit gedacht werden kann. Dies führt ihn zum Kernproblem der Mathematik, nämlich der Unentscheidbarkeit, die den Menschen an die Grenzen seines Verstandes bringt. Vor allem auf Grund dieser Unentscheidbarkeit kann kein vollständiges System konstruiert werden, in dem alle wahren Sätze auch beweisbar sind.

In diesem Zusammenhang vermag man vielleicht eine gewisse Nähe zwischen Gödel und Badiou zu denken und zwar in der Weise, in der man sich im Rahmen der Mathematik das Ereignis als etwas vorstellen kann, das kein Weitergehen und keine nachträgliche Beschreibung erlaubt. Eben deshalb kann man sagen, dass Gödel sowohl die Mathematik als auch unser Denken mit Blick auf die Unendlichkeit an die letzten Grenzen führt, die kein Weitergehen mehr erlauben.

Versucht man, eine Parallele zwischen Gödel und Badiou zu finden, so kann man feststellen, dass Gödel zwar nicht das Ereignis selbst, wohl aber den Ereignisort „gefunden“ hat. Der Ereignisort kann hier als Bindeglied zwischen der Mathematik und dem Ereignis gedeutet werden. Dabei gilt, dass das Ereignis im Rahmen der Mathematik eine Störung, einen Bruch verursacht. Gerade aus diesem Grund kann man sich trotz der Nichtfassbarkeit des Ereignisses zumindest dem Effekt des Ereignisses nähern.

2 Resümee über das Ereignis und dem Ereignisort bei Badiou vor dem Hintergrund der Lektüre Badious: Paulus – Die Begründung des Universalismus

Der Ereignisort liegt Badiou zufolge am Rand einer Leere. Obwohl dieser selbst präsentiert ist, gehört der Ereignisort nicht zur Situation. Gleichzeitig gilt aber, dass, wenn es ein Ereignis gibt, dieses nur innerhalb der Situation erscheint. Aus diesem Grund muss das Ereignis selbst Leere sein. Damit stellt sich die Frage, wie ein solches Loch definiert werden kann. Es kann nur über den Rand definiert werden, der sich als Ort des Ereignisses feststellen lässt. Das Ereignis zeigt sich in diesem Zusammenhang als ein Bruch in der Kontinuität, weshalb man eher vom Ereignisort als vom Ereignis selbst sprechen kann, da das Ereignis stets in einer Art Vergangenheit liegt, als etwas Abgeschlossenes gilt, dessen Wirkung aber bis in die Gegenwart, ja sogar bis in die Zukunft, reicht. Das Ereignis wird nur im Modus der Vorzukunft beschreibbar. Gleichzeitig gilt, dass ein Ereignisort das Ereignis, das erst im Nachhinein als solches qualifiziert werden kann, nicht bedingt. Des Weiteren gilt, dass ein Ereignis niemals bewiesen, sondern „nur" behauptet und bezeugt werden kann, wobei aber bereits das Bezeugen selbst als ein Ereignis gelten kann. Das Ereignis bewirkt dabei eine Veränderung der Situation, die sich jeder letzten Ergründung entzieht.

Ausgehend von der Theorie des Ereignisses und des Ereignisortes bei Badiou lassen sich nicht nur gewisse Parallelen zu Kurt Gödel ziehen, sondern auch zu Paulus und seiner Theologie.

Paulus reduziert das gesamte Christentum auf das Ereignis der Auferstehung Jesu, dem Messias. Die Auferstehung muss dabei als „Bruch" in der Kontinuität der Geschichte gesehen werden und sich jeder Definition entziehen. Aus diesem Grund kann die Auferstehung Christi auch niemals bewiesen, sondern „nur" bezeugt werden. Dieses „treue" Zeugnis der Auferstehung gilt hierbei selbst als ereignishaft. Die Auferstehung ist somit etwas, von dem man behaupten kann, dass es existiert oder zu existieren hat, insofern seine Existenz im Nachhinein von den Jüngern Jesu und allen Christen bezeugt wird.

Während die Auferstehung für Badiou das Ereignis bei Paulus ist, wird das Kreuz als der „Ereignisort“ identifiziert, der jedoch selbst erst durch das Ereignis als jener benennbar wird. Gleichzeitig gilt bei Paulus, dass es das Ereignis der Auferstehung auf der Ebene der Situation nicht gibt. Eben deswegen kann man eher vom Kreuz sprechen, an dem die Auferstehung ihren Ort hat – sofern sie überhaupt existiert – als vom Ereignis selbst. Wenn die Auferstehung aber zur Situation gehört, dann muss sie als eines präsentiert sein, das seine eigene Stätte, das Kreuz, in der Situation hat. Um das Kreuz aber exakt lokalisieren zu können, müsste es ein Teil der Situation sein, obwohl das Kreuz die Auferstehung nicht an sich selbst bindet.

Zuletzt sei noch darauf hingewiesen, dass man im Rahmen des Christusereignisses zwar das Leben, Leiden und Sterben am Kreuz nachvollziehen kann, aber eben nicht die Auferstehung, die als etwas „Neues“ in die bestehende Ordnung hereinbricht und von dieser nicht integriert werden kann. Wie bereits erwähnt, bedingt dabei nicht der Ereignisort das Ereignis der Auferstehung, sondern das Eingreifen und Wirken Gottes ist es, das dieses Ereignis erst möglich macht. Nur durch ihn selbst wird das Kreuz zur Stätte, an der schließlich das Christusereignis wahrnehmbar wird. Die Auswirkungen dieses Ereignisses der Auferstehung Jesu Christi sind noch heute spürbar. Durch die standhafte Treue der Gläubigen bildete sich eine neue christliche Gemeinschaft, die sich einzig und allein auf dieses Christusereignis beruft.

LITERATUR

BADIOU, Alain: Das Sein und das Ereignis. Aus dem Franz. übers. von Gernot Kamecke. Berlin: Diaphanes-Verl., 2005[1].

BADIOU, Alain: Gott ist tot: Kurze Abhandlung über eine Ontologie des Übergangs. Aus dem Franz. von Jürgen Brankel. Wien: Turia, 2007[2].

CANTOR, Georg: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts: mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor – Dedekind. Ernst Zermelo [Hrsg.]; Berlin: Springer, 1932.

GOLDSTEIN, Rebecca: Kurt Gödel. Jahrhundertmathematiker und großer Entdecker. Aus dem Amerikanischen von Thorsten Schmidt. München: Piper, 2006.

HALLWARD, Peter: Badiou: A subject to truth Minneapolis: Univ. of Minnesota Press, 2003.

HEIDEGGER, Martin: Gesamtausgabe 65: Abt. 3, Unveröffentlichte Abhandlungen, Vorträge, Gedachtes: Beträge zur Philosophie: (vom Ereignis). Hermann, Friedrich-Wilhelm [Hrsg.]; Frankfurt am Main, 1989.

HEIDEGGER, Martin: Einführung in die Metaphysik. Tübingen: Niemeyer, 1958.

KAUFMANN, Felix: Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung: Eine Untersuchung über die Grundlagen der Mathematik. Leipzig; Wien: Deuticke, 1930[1].

KIPPENHAHN, Rudolf: Eins, zwei, drei ... unendlich: Eine Reise an die Grenzen der Mathematik. München; Zürich: Piper, 2007.

MAOR, Eli: Dem Unendlichen auf der Spur. Aus dem Engl. von Doris Gerstner. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 1989.

MESCHKOWSKI, Herbert: Probleme des Unendlichen: Werk und Leben Georg Cantors. Braunschweig: Vieweg, 1967.

Nagel, Ernest: Der Gödelsche Beweis. [Dt. Übers.: Hubert Schleichert]. Ernest Nagel; Newman, James R. [Hrsg.]; Wien, München: Oldenbourg, 1979[2].

PADBERG, Friedhelm: Zahlentheorie und Arithmetik. Heidelberg; Berlin: Spektrum, Akad.-Verl., 1999.

RUCKER, Rudy: Die Ufer der Unendlichkeit: Analysen und Spekulationen über die mathematischen, physikalischen und wirklichen Ränder unseres Denkens. Frankfurt am Main: Krüger, 1989.

RUSSELL, Bertrand: Einführung in die mathematische Philosophie: Mit einer Einleitung von Michael Otte. Hrsg. von Johannes Lenhard und Michael Otte. Hamburg: Meiner, 2002.

SCHAEFER, Helmut H.: Georg Cantor und das Unendliche in der Mathematik : Vorgetragen in der Sitzung vom 31. Oktober 1981. Berlin: Springer, 1982. (Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse; Jahrgang 1982, 2. Abhandlung).

THOMÄ, Dieter [Hrsg.] : Heidegger-Handbuch: Leben - Werk – Wirkung. Stuttgart: Metzler, 2003.

WALLACE, David Foster: Georg Cantor: Der Jahrhundertmathematiker und die Entdeckung des Unendlichen. Aus dem Amerikanischen von Helmut Reuter. München: Piper, 2007.

ZEILLINGER, Peter: Dem Ereignis nach-denken: Hat Badious Philosophie eine Zukunft? Erschienen in: Treue zur Wahrheit. Die Begründung der Philosophie Alain Badious. 2010.

ZEILLINGER, Peter: Badiou und Paulus: Das Ereignis als Norm? Erschienen in: IWK-Mitteilungen 61. Jg. 2006.

ABSTRACT

Diese Arbeit ist der Versuch, ausgewählte Aspekte und Komponenten des „Unendlichkeitsproblems“ zu beleuchten. Dabei soll eine Brücke geschlagen werden zwischen der Mathematik, der Philosophie und der Theologie und zwar in der Art und Weise, dass jeweils eine dieser Wissenschaften an jener Stelle unterstützend eingreift und die Arbeit weiterführt, wo die eigenen fachspezifischen Methoden eines anderen Wissensgebietes nicht mehr greifen und mit ihnen das Problem weder logisch integriert noch gelöst werden kann.

In der Mathematik gibt es verschiedenste Ideen zu einer Theorie des Unendlichen. Der erste Teil der Arbeitet beschäftigt sich daher mit der „Lehre des Unendlichen“ in der Arithmetik, bei Georg Cantor und bei Kurt Gödel. Cantors „Schöpfung“ ist die Mengenlehre innerhalb derer er seine „Lehre des Unendlichen“ entwirft. Ein weiterer Grund für die Auseinandersetzung mit ihm ist das „abgründige Gebiet der Selbstbezüglichkeit“. Gödel hingegen steht vor dem Problem der Widerspruchsfreiheit von Systemen. Er veranschaulicht in seinem Unvollständigkeitsbeweis, dass es wahre existierende arithmetische Sätze gibt, die nicht beweisbar sind.

Im zweiten Teil der Arbeit wird versucht, die Mathematik aus der „Sackgasse“ zu befreien und sie in eine neue Richtung zu lenken. Dies soll durch die Philosophie des Alain Badiou und seinem Begriff des „Ereignisses“ vollzogen werden. Hierbei wandelt er die mathematische Fragestellung in eine philosophische um. Badiou stellt eine These bezüglich der Identität von Mathematik und Ontologie auf, obwohl er sich bewusst ist, dass diese weder von den Mathematikern noch von den Philosophen gutgeheißen wird.

Im dritten Teil wird in einem kurzen Abschnitt versucht eine Parallele zwischen Kurt Gödel und Alain Badiou zu finden und zwar in der Weise als man sich in der Mathematik das Ereignis als etwas vorstellen kann, das kein Weitergehen erlaubt. Gödel hat hierbei zwar nicht das Ereignis, wohl aber den Ereignisort „gefunden“. Daran anschließend steht die Auferstehung Christi im Zentrum des Interesses. Für Paulus ist das Ereignis schlechthin die Auferstehung Christi, die gleichzeitig ein Bruch in der Kontinuität der Geschichte ist. Dieses Ereignis kann niemals bewiesen, sondern „nur“ bezeugt werden

LEBENSLAUF

PERSÖNLICHE DATEN

Name	Elisabeth Lehner
Geburtsdatum	12.09.1981
Geburtsort	Wien
Staatsbürgerschaft	Österreich

BILDUNGSGANG

1988 – 1992	Volksschule, 7161 St. Andrä am Zicksee
1992 – 1996	röm. kath. Hauptschule der Schwestern vom göttlichen Erlöser, 7100 Neusiedl am See
1996 – 2000	Oberstufenrealgymnasium Theresianum, 7000 Eisenstadt
2000 – 2001	Studium Lehramt UF Mathematik UF Physik
2001 – 2011	Studium Lehramt UF Katholischen Religion UF Mathematik